637. Знайти вектор x з рівняння
$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4x = 0$, де
$a_1 = (5, -8, -1, 2), a_2 = (2, -1, 4, -3), a_3 = (-3, 2, -5, 4)$.

З'ясувати, чи будуть лінійно залежними такі системи векторів:

641. $\begin{aligned} a_1 &= (2, -3, 1), \\ a_2 &= (3, -1, 5), \\ a_3 &= (1, -4, 3). \end{aligned}$

643. $\begin{aligned} a_1 &= (4, -5, 2, 6), \\ a_2 &= (2, -2, 1.3), \\ a_3 &= (6, -3, 3, 9), \\ a_4 &= (4, -1, 5, 6). \end{aligned}$

Знайти всі значення параметра λ, при яких вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$

665. $\begin{aligned} a_1 &= (2, 3, 5), \\ a_2 &= (3, 7, 8), \\ a_3 &= (1, -6, 1), \\ b &= (7, -2, \lambda). \end{aligned}$

668. $\begin{aligned} a_1 &= (3, 2, 5), \\ a_2 &= (2, 4, 7), \\ a_3 &= (5, 6, \lambda), \\ b &= (1, 3, 5). \end{aligned}$

672.Знайти всі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів:

$$a_1 = (4, -1, 3, -2),$$
$$a_2 = (8, -2, 6, -4),$$
$$a_3 = (3, -1, 4, -2),$$
$$a_4 = (6, -2, 8, -4).$$

Знайти всі бази системи векторів:

673. $\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 0, 0), \\ a_2 &= (1, 2, 3, 4), \\ a_3 &= (3, 6, 0, 0). \end{aligned}$

674. $\begin{aligned} a_1 &= (1, 2, 3, 4), \\ a_2 &= (2, 3, 4, 5), \\ a_3 &= (3, 4, 5, 6), \\ a_4 &= (4, 5, 6, 7). \end{aligned}$

Знайти яку–небудь базу системи векторів і всі вектори системи, що не входять до цієї бази, виразити через вектори бази:

679. $\begin{aligned} a_1 &= (5, 2, -3, 1), \\ a_2 &= (4, 1, -2, 3), \\ a_3 &= (1, 1, -1, -2), \\ a_4 &= (3, 4, -1, 2). \end{aligned}$

680. $\begin{aligned} a_1 &= (2, -1, 3, 5), \\ a_2 &= (4, -3, 1, 3), \\ a_3 &= (3, -2, 3, 4), \\ a_4 &= (4, -1, 15, 17), \\ a_5 &= (7, -6, -7, 0). \end{aligned}$

Вектори $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і x задани своїми координатами в деякому базисі. Довести, що система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є базисом і знайти координати вектора x в цьому базисі.

1277.$e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 1, 2),\ e_3 = (1, 2, 3);\ x = (6, 9, 14)$.

1278.$e_1 = (2,1,-3),\ e_2 = (3,2,-5),\ e_3 = (1,-1,1);\ x = (6,2,-7)$.

Довести, що кожна з двох систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між координатами одного і того ж самого вектора в цих двох базисах:

1280.$e_1 = (1,2,1),\ e_2 = (2,3,3),\ e_3 = (3,7,1);\ e_1' = (3,1,4),\ e_2' = (5,2,1),\ e_3' = (1,1,-6)$.

1281.$e_1 = (1,1,1),\ e_2 = (1,2,1),\ e_3 = (1,1,2);\ e_1' = (2,2,5),\ e_2' = (1,0,3),\ e_3' = (-2,-3,-4)$.

1282. Знайти координати многочлена:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

а) в базисі $1, x, x^2, ..., x^n$;
б) в базисі $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, ..., (x-\alpha)^n$,виявнивши, що останні многочлени дійсно утворюють базис.

1283.Знайти матрицю переходу від базиса $1, x, x^2, ..., x^n$; до базиса $1, x-\alpha, (x-\alpha)^2, ..., (x-\alpha)^n$ простору многочленів степеня, меншого чи рівного n.

Чи є лінійним підпростором відповідного векторного простору кожна з таких сукупностей векторів?

1285. Всі вектори n-вимірного векторного простору,координати яких - цілі числа?

1291. Всі вектори з R_n,координати яких задовольняють рівняння $x_1+x2+...+x_n = 0$?

1292. Всі вектори з R_n,координати яких задовольняють рівняння $x_1+x2+...+x_n = 1$?

1297. Всі n-вимірні вектори, в яких перша і остання координати рівні між собою.

1298. Всі n-вимірні вектори, в яких координати з парними номерами дорівнюють нулю.

1300. Всі n-вимірні вектори виду $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta...)$, де α і β - будь-які числа.

1301. Довести, що всі квадратні матриці порядку n з дійсними елементами (чи елементами з будь-якого поля P) утворюють векторний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число. Знайти базис і розмірність цього простору.

1303. Довести, що всі симетричні матриці утворюють лінійний підпростір простору всіх квадратних матриць порядку n. Знайти базис і розмірність цього підпростору.

1304. Довести, що кососиметричні матриці утворюють лінійний підпростір простору всіх квадратних матриць порядку n. Знайти базис і розмірність цього підпростору.

1308. Знайти який-небудь базис і розмірність лінійного підпростору L простору R_n, якщо L задано рівнянням $x_1 + x2 + ... + x_n = 0$.

Знайти розмірність і базис лінійних підпросторів, натянутих на такі системи векторів:

1310.$a_1 = (1,0,0,-1),\ a_2 = (2,1,1,0),\ a_3 = (1,1,1,1),\ a_4 = (1,2,3,4)$,
$a_5 = (0,1,2,3)$.

1311.$a_1 = (1,1,1,1,0),\ a_2 = (1,1,-1,-1,-1),\ a_3 = (2,2,0,0,-1),\ a_4 = (1,1,5,5,2)$,
$a_5 = (1,-1,-1,0,0)$.

Знайти системи лінійних рівнянь, що задають лінійні підпростори, натянуті на такі системи векторів:

1312.$a_1 = (1, -1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 0, 1),\ a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

1313.$a_1 = (1, -1, 1, -1, 1),\ a_2 = (1, 1, 0, 0, 3),\ a_3 = (3, 1, 1, -1, 7),\ a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину лінійних підпросторів: L_1, натягнутого на вектори $a_1, a_2, \dots, a_k$, L_2, натянутого на вектори $b_1, b_2, \dots, b_l$.

1317.$a_1 = (1, 2, 0, 1),\ a_2 = (1, 1, 1, 0),\ b_1 = (1, 0, 1, 0),\ b_2 = (1, 3, 0, 1)$.

1318.$a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (1, -1, 1, -1),\ a_3 = (1, 3, 1, 3), b_1 = (1, 2, 0, 2)$, $b_2 = (1, 2, 1, 2),\ b_3 = (3, 1, 3, 1)$.

Знайти базиси суми і перетину лінійних підпросторів, натянутих на системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$:

1320.$a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (1, 1, -1),\ a_3 = (1, 3, 3), b_1 = (2, 3, -1)$, $b_2 = (1, 2, 2),\ b_3 = (1, 1, -3)$.

1321.$a_1 = (1, 2, 1, -2),\ a_2 = (2, 3, 1, 0),\ a_3 = (1, 2, 2, -3), b_1 = (1, 1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 0, 1, -1),\ b_3 = (1, 3, 0, -4)$.

1329. Довести, що простір всіх квадратних матриць порядку n є пряма сума лінійних підпросторів L_1 - симетричних і L_2 - кососиметричних матриць. Знайти проекції A_1 і A_2 матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

на L_1 паралельно L_2 і на L_2 паралельно L_1.

1332.Довести, що якщо $P = L + x_0$, де L - лінійний підпростір і x_0 - вектор простору R_n, то вектор x_0 належить многовиду P і після заміни цього вектора будь-яким іншим вектором $x \in P$ отримаємо той же таки многовид P.