

Зміст

1	Комплексні числа	2
2	Основні алгебраїчні структури	4
3	Подільність натуральних чисел	5
3.1	Теорія конгруенцій. Теорема Ейлера. Мала теорема Ферма. Китайська теорема про лишки.	8
4	Побудова кільця многочленів від однієї змінної.	10
4.1	Схема Хорнера і теорема Безу. Подільність многочленів.	10

Розділ 1

Комплексні числа

1. Перевірити, що множення комплексних чисел є асоціативним, тобто $((a + ib) \cdot (c + id)) \cdot (u + iv) = (a + ib) \cdot ((c + id) \cdot (u + iv))$
2. Перевірити, що множення комплексних чисел є дистрибутивним відносно додавання, тобто:
 $(a + ib)((c + id) + (u + iv)) = (a + ib)(c + id) + (a + ib)(u + iv)$
3. Знайти дійсні x і y , якщо відомо що

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i.$$

4. Знайти комплексне число z , що є розв'язком рівняння:
1) $(2 + 3i)z + 5 + 6i = 7 + 8i$,
2) $(1 + 3i)z + 4 + 6i = 2 + 8i$.

5. Обчислити:

$$1) \frac{(1 - i)^5 - 1}{(1 + i)^5 + 1}; \quad 2) \frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}; \quad 3) \frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}.$$

6. Представити в тригонометричній формі такі комплексні числа
a) 1 ; b) -1 ; c) i ; d) $-i$; e) $1 + i$; f) $1 - i$; g) $-1 + i$;
h) $1 + \sqrt{3}i$; i) $1 - \sqrt{3}i$; j) -3π ; k) $-1 - \sqrt{3}i$.
7. Знайти корені 4-го степеня з числа $z = -16$ та зобразити їх на комплексній площині.
8. Знайти корені 3-го степеня з числа $z = -i$ та зобразити їх на комплексній площині.
9. Зобразити множину точок, що задовольняють нерівностям:
а) $1 \leq |z| < 2$;
б) $|z - 1 - i| < 1$, $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$

10. Зобразити множину точок, що задовольняють нерівності $0 < \arg z < \frac{5\pi}{6}$.
11. Довести тотожність

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

Пояснити, який геометричний зміст має ця тотожність.

12. Обчислити

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}, \quad \left(\frac{7 - 6i}{6 + 7i}\right)^{28}, \quad \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}.$$

13. Знайти z , якщо

$$\text{a) } z^2 = 8 + 6i, \quad \text{b) } z^3 = i, \quad \text{c) } z^4 = -1, \quad \text{d) } z^3 = -1 + \sqrt{3}i, \quad \text{e) } z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}.$$

14. Обчислити $(1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$, $(1 - \frac{\sqrt{3-i}}{2})^{24}$.

15. * Довести, що корені n -го степеня з 1 утворюють групу відносно множення (тобто, добуток двох коренів n -го степеня з 1 знову є коренем n -го степеня з 1, і виконуються відповідні аксіоми).

16. Виписати всі корені з 1 степеня

$$\text{a) } 2; \quad \text{b) } 3; \quad \text{c) } 4; \quad \text{d) } 6; \quad \text{e) } 8.$$

Вказати, які з цих коренів будуть первісними.

17. Виписати всі первісні корені з 1 12-го степеня.

18. Знайти суму коренів 6-го степеня з 1.

19. * Знайти суму коренів n -го степеня з 1.

20. * Обчислити $1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \dots + a^k \cos k\varphi$.

21. * Довести, що $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$.

22. * Довести $\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

23. Виразити через $\cos x$ і $\sin x$:

$$\text{a) } \cos 3x, \quad \text{b) } \cos 5x, \quad \text{c) } \sin 4x, \quad \text{d) } \sin 6x.$$

24. Представити у вигляді многочлена першого ступеня від тригонометричних функцій кутів, кратних x :

$$\text{a) } \cos^4 x, \quad \text{b) } \cos^6 x, \quad \text{c) } \sin^3 x, \quad \text{d) } \sin^5 x.$$

Розділ 2

Основні алгебраїчні структури

25. Множина з двох елементів $M=\{a,b\}$ з операцією, заданою таблицею (таблицею Келі)

\circ	a	b
a	a	b
b	b	a

утворює групу. Якій елемент в цій групі є нейтральним?

26. Побудувати таблицю Келі для групи з трьох елементів.
27. Множина S самосуміщень трикутника утворює групу відносно композиції відображень. Скільки самосуміщень має трикутник? Побудувати таблицю, що задає операцію на S . Чи буде комутативною група самосуміщень трикутника?

Розділ 3

Подільність натуральних чисел

28. Знайти неповну частку і остачу при діленні цілого числа a на ціле число b , якщо:
- а) $a = 131$, $b = 31$; б) $a = 31$, $b = 131$; в) $a = -131$, $b = 31$;
д) $a = -31$, $b = 131$; е) $a = 131$, $b = -31$; ф) $a = 31$, $b = -131$;
г) $a = -31$, $b = -131$; х) $a = -131$, $b = -31$.
29. При діленні цілого числа a на ціле число b дістають неповну частку q і остачу r . Знайти b та q , якщо:
- а) $a = 100$, $r = 6$; б) $a = 148$, $r = 37$; в) $a = 298$, $r = 10$;
г) $a = 497$, $r = 16$; д) $a = 28$, $r = 2$; е) $a = 14$, $r = 14$.
30. Довести, що:
- а) квадрат непарного цілого числа при діленні на 8 дає остачу 1;
б) сума квадратів двох послідовних цілих чисел при діленні на 4 дає остачу 1;
в) числа виду $3k + 2$, $k \in Z$ не можуть бути квадратами цілих чисел;
г) сума квадратів двох непарних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа;
д) $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться на 10 при будь-якому натуральному n .
е) сума квадратів п'яти послідовних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа;
є) якщо остача від ділення деякого цілого числа на 9 є одне із чисел 2, 3, 5, 6, 8, то це число не може бути квадратом цілого числа;
ж) якщо чисельник дроби є різниця квадратів двох непарних цілих чисел, а знаменник – сума квадратів цих чисел, то такий дріб можна завжди скоротити на 2, але не на 4.

31. Натуральне число при діленні на 11 має остачу 4. Довести, що його квадрат при діленні на 11 має остачу 5.
32. Натуральне число при діленні на 5 має остачу 4. Довести, що сума куба цього числа та його квадрату ділиться на 5.
33. Натуральне число при діленні на 5 має остачу 1, а друге число при діленні на 5 має остачу 2. Довести, що сума квадратів цих чисел ділиться на 5.
34. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.
35. Чи може в натуральному ряду чисел стояти підряд 10 складених чисел?
36. Довести, що кожне натуральне складене число n має власний дільник, що не перевищує \sqrt{n} .
37. Чи є числа 127, 919, 1033, 1643, 1657, 2647, 2773, 3163, 3621, 3623, 3631, 3763, 3767, 3769, 7429 простими?
38. За допомогою "решета Ератосфена" знайти всі прості числа з проміжку:
а) [801, 821]; б) [1445, 1467]; с) [973, 999].
39. Довести, що дане число a є складеним, якщо:
а) $a = 2^{30} - 1$;
б) $a = n^4 + 4$, $n \neq \pm 1$ (теорема Софії Жермен);
в) $a = n^4 + n^2 + 1$, $n > 1$.
40. Знайти показник степеня простого числа p , яке міститься в добутку $n!$, якщо:
а) $p = 3$, $n = 100$;
б) $p = 11$, $n = 1000$;
в) $p = 13$, $n = 10000$;
г) $p = 7$, $n = 81561$.
41. Знайти всі такі прості числа p , щоб простими також були числа:
а) $p + 5$; б) $2p^2 + 1$; с) $p^2 + 8$; д) $p + 10$ і $p + 14$;
е) p , $4p^2 + 1$ і $6p^2 + 1$.
42. Довести, що одночасно не можуть бути простими числа:
а) $p + 5$ і $p + 10$; б) p , $p + 2$ і $p + 5$.
43. Знайти канонічний розклад чисел: а) 111; б) 3680; в) 2156; г) 18!; д) 40!; е) 75!.

44. Скількома нулями закінчується число $n!$, якщо: а) $n = 50$; б) $n = 123$; в) $n = 1985$?
45. Розкласти на прості множники число:
а) $2^9 + 3^9$; а) $4^{18} - 3^{18}$; а) $5^6 + 3^6$.
46. Довести, що якщо $p, q \geq 3$ — прості числа, то $p^2 - q^2$ ділиться на 24.
47. Довести, що якщо $p \geq 5$ — просте число, то $p^2 - 1$ ділиться на 24.
48. Довести, що з п'яти послідовних цілих чисел завжди можна вибрати одне, взаємно просте з усіма іншими.
49. Довести, що добуток п'яти послідовних цілих чисел завжди ділиться а) на 30; б) на 120.
50. Знайти найбільший спільний дільник (НСД) чисел:
а) 0 і -7 ; б) -231 і 546 ; с) 1001 і 6253 ; д) 1173 і 323 .
51. Знайти найменше спільне кратне (НСК) чисел:
а) 0 і 1; б) 360 і 504;
с) двох послідовних цілих чисел n і $n + 1$.
52. Знайти лінійне зображення НСД чисел:
а) 899 і 493 ; б) 1445 і 629 ; с) 903 і 731 ; д) 1786 і 705 .
53. Знайти найбільший спільний дільник (НСД) чисел:
а) $2a + 13$ і $a + 7$;
б) $a^n - 1$ і $a^m - 1$, якщо a — ціле, m і n — натуральні числа;
с) $a^2 + 1$ і $2a + 3$, якщо a — ціле число;
д) $2^{100} - 1$ і $2^{120} - 1$.
54. Знайти загальний розв'язок лінійного діофантового рівняння:
а) $3x + 5y = 11$; б) $14x + 2y = 15$; с) $1990x - 173y = 11$; д) $-2x + 11y = 13$.
55. Знайти всі натуральні розв'язки лінійного діофантового рівняння:
а) $-3x + 5y = 7$; б) $6x - 3y = 2$; с) $3x - 2y = 13$.
56. Чи може число, яке записується за допомогою 100 нулів, 100 двійок і 100 одиниць бути точним квадратом?
57. $56a = 65b$. Доведіть, що $a + b$ — складене число.

58. Довести, що:
- а) $2903^n - 803^n - 464^n + 261^n \div 1897$, якщо n – натуральне число;
 - б) $n(n+1)(n+2) \div 504$, якщо $n+1$ є кубом деякого натурального числа;
 - в) $a^{4n+1} - a \div 30$, якщо a – ціле, а n – невід’ємне ціле число;
 - г) $a^3 - b^3 \div 2^n$ тоді і тільки тоді, коли $(a - b) \div 2^n$, де a, b – цілі непарні числа, n – натуральне число;
 - д) $(a+1, a^{2k}+1) = 1$, якщо a – парне натуральне число, k – довільне натуральне число.
59. Довести, що: а) $288! \div (16!)^{18}$; б) $288! \div (18!)^{16}$; в) $C_{10000}^{5000} \div 7$; е) $(n!)! \div (n!)^{(n-1)!}$

3.1 Теорія конгруенцій. Теорема Ейлера. Мала теорема Ферма. Китайська теорема про лишки.

60. Довести, що $11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ ділиться на 10.
61. Довести, що якщо n не ділиться 7, $n \in Z$, то або $(n^3 - 1)$ ділиться на 7, або $(n^3 + 1)$ ділиться на 7.
62. Довести, що $11^6 + 14^6 - 13^{63}$ ділиться на 10.
63. Знайти остачу від ділення $2^{100} + 3^{102}$ на 101.
64. Знайти остачу від ділення $8^{900} + 9^{800}$ на 29.
65. Знайти остачу від ділення $10^{100} + 12^{102}$ на 13.
66. Довести, що $7^{120} - 1$ ділиться на 143.
67. Нехай n – натуральне число, що не є кратним 17. Довести, що або $n^8 - 1$ або $n^8 + 1$ ділиться на 17.
68. Довести, що
- а) $43^{101} + 23^{11}$ ділиться на 66;
 - б) $a^n + b^n$ ділиться на $a + b$, якщо n – деяке натуральне, непарне число.
69. Довести, що $300^{3000} - 1$ ділиться на 1001.
70. Знайти остачу при діленні на 8 числа $333^{333^{333}}$.
71. Знайти остачу при діленні на 12 числа $2005^{2007} + 2007^{2005}$.

72. Довести, що $2222^{5555} + 5555^{2222}$ ділиться на 7.
73. Знайти останню цифру числа 7^{7^7} .
74. Знайти остачу від ділення $2^{100} + 4^{200} + 8^{400}$ на 3.
75. Довести, що $30^{99^{99}} + 61^{100^{100^{100}}}$ ділиться на 31.
76. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 13: $\bar{2}x^2 - \bar{3}x + \bar{1} = 0$.
77. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 3: $x^2 - \bar{2}x + \bar{4} = 0$.
78. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 11: $\bar{2}x^2 + \bar{5}x + \bar{4} = 0$.
79. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 7: $x^2 - \bar{2}x + \bar{5} = 0$.
80. За допомогою китайської теореми про лишки розв'язати систему конгруенцій:
- a) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$, b) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \end{cases}$,
- c) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$, d) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$.
81. Розв'язати конгруенції:
- a) $105x \equiv 37 \pmod{100}$; b) $10x \equiv 5 \pmod{15}$; c) $12x \equiv 24 \pmod{8}$.

Розділ 4

Побудова кільця многочленів від однієї змінної.

4.1 Схема Хорнера і теорема Безу. Подільність многочленів.

82. Поділити з остачею:

а) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;

б) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

83. Знайти частку і остачу від ділення:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $g(x) = x - 1$ в кільці $\mathcal{Z}[x]$;

б) $f(x) = 4x^4 + x^3$ на $g(x) = x + 1 + i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$;

в) $f(x) = \bar{6}x^6 + x^5 + \bar{1}$ на $g(x) = x + \bar{3}$ в кільці $\mathcal{Z}_7[x]$.

84. Знайти значення многочлена $f(x)$ з кільця $\mathcal{K}[x]$ в точці $x = x_0$, якщо:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $x_0 = 4$, $\mathcal{K} = \mathcal{Z}$;

б) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $x_0 = -2 - i$, $\mathcal{K} = \mathcal{C}$;

в) $f(x) = x^5 + x^4 + \bar{3}x^2 + \bar{1}$, $x_0 = \bar{3}$, $\mathcal{K} = \mathcal{Z}_5$;

г) $f(x) = x^3 - (1 + \sqrt{2})x^2 + (1 + \sqrt{2})$, $x_0 = 1 - \sqrt{2}$, $\mathcal{K} = \mathcal{Q}(\sqrt{2})$.

85. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x + 1$ на двочлени:

а) $g(x) = x + i$;

б) $g(x) = x^2 + 1$.

86. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями двочлена $g(x) = x - a$, якщо:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$, $a = 1$ в кільці $\mathcal{Q}[x]$;

- б) $f(x) = \bar{2}x^4 + x^3 + x^2 + \bar{2}$, $a = \bar{1}$ в кільці $\mathcal{Z}_3[x]$;
 в) $f(x) = x^5 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1$, $a = -i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$;
 г) $f(x) = x^5$, $a = -1$ в кільці $\mathcal{Q}[x]$;
 г) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i$, $a = -i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$.

87. Розкласти:

- а) $f(x) = x^6 - 4x^5 - 7x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$ за степенями двочлена $g(x) = x^2 - 1$ в кільці $\mathcal{Z}[x]$;
 б) $f(x) = x^7 + \bar{1}$ за степенями двочлена $g(x) = x^3 + \bar{2}$ в кільці $\mathcal{Z}_5[x]$;
 в) $f(x) = x^3 - 2x + i$ за степенями двочлена $g(x) = x^3 + i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$.

88. Чому дорівнює показник кратності кореня:

- а) 2 для многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;
 б) -2 для многочлена $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + x^2 - 16x - 16$?

89. Визначити A і B так, щоб многочлен $Ax^4 + Bx^3 + 1$ ділився на $(x - 1)^2$.

90. Знайти найбільший спільний дільник многочленів:

- а) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ і $x^3 + x^2 - x - 1$;
 б) $x^4 - 4x^3 + 1$ і $x^3 - 3x^2 + 1$;
 в) $x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ і $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.

91. Використовуючи алгоритм Евкліда підібрати многочлени $M_1(x)$ і $M_2(x)$ так, щоб $f_1(x) \cdot M_2(x) + f_2(x) \cdot M_1(x) = \delta(x)$, де $\delta(x)$ найбільший спільний дільник $f_1(x)$ і $f_2(x)$:

- а) $f_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$, $f_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
 б) $f_1(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

92. Використовуючи алгоритм Евкліда підібрати многочлени $M_1(x)$ і $M_2(x)$ так, щоб $f_1(x) \cdot M_2(x) + f_2(x) \cdot M_1(x) = 1$:

- а) $f_1(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12$, $f_2(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$;
 б) $f_1(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2$, $f_2(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$.