Зміст

Розділ 1

Комплексні числа

1. Перевірити, що множення комплексних чисел є асоціативним, тобто
$((a+ib)\cdot(c+id))\cdot(u+iv)=(a+ib)\cdot((c+id)\cdot(u+iv))$

2. Перевірити, що множення комплексних чисел є дистрибутивним відносно додавання, тобто:
$(a+ib)((c+id)+(u+iv))=(a+ib)(c+id)+(a+ib)(u+iv)$ -

3. Знайти дійсні x і y, якщо відомо що
$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

4. Знайти комплексне число z, що є розв'язком рівняння:
1)(2+3i)z + 5+6i= 7+8i,
2)(1+3i)z + 4+6i= 2+8i.

5. Обчислити:
$$1)\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}; \qquad 2)\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \qquad 3)\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

6. Представити в тригонометричній формі такі комплексні числа
$a)1;$ $b)-1;$ $c)i;$ $d)-i;$ $e)1+i;$ $f)1-i;$ $g)-1+i;$
$h)1+\sqrt{3}i;$ $i)1-\sqrt{3}i;$ $j)-3\pi;$ $k)-1-\sqrt{3}i.$

7. Знайти корені 4-го степеня з числа $z=-16$ та зобразити їх на комплексній площині.

8. Знайти корені 3-го степеня з числа $z=-i$ та зобразити їх на комплексній площині.

9. Зобразити множину точок, що задовольняють нерівностям:
а) $1\le|z|<2$;
б) $|z-1-i|<1$, $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$

10. Зобразити множину точок, що задовольняють нерівності $0 < \arg z < \frac{5\pi}{6}$.

11. Довести тотожність

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

Пояснити, який геометричний зміст має ця тотожність.

12. Обчислити

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}, \qquad \left(\frac{7-6i}{6+7i}\right)^{28}, \qquad \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}.$$

13. Знайти z, якщо
a)$z^2 = 8+6i$, b)$z^3 = i$, c)$z^4 = -1$, d)$z^3 = -1+\sqrt{3}i$, e)$z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

14. Обчислити $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$, $(1 - \frac{\sqrt{3}-i}{2})^{24}$.

15. * Довести, що корені n-го степеня з 1 утворюють групу відносно множення (тобто, добуток двох коренів n-го степеня з 1 знову є коренем n-го степеня з 1, і виконуються відповідні аксіоми).

16. Виписати всі корені з 1 степеня
a)2; b)3; c)4; d)6; e)8.
Вказати, які з цих коренів будуть первісними.

17. Виписати всі первісні корені з 1 12-го степеня.

18. Знайти суму коренів 6-го степеня з 1.

19. * Знайти суму коренів n-го степеня з 1.

20. * Обчислити $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + ... + a^k \cos k\varphi$.

21. * Довести, що $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

22. * Довести $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

23. Виразити через $\cos x$ і $\sin x$:
a)$\cos 3x$, b)$\cos 5x$, c)$\sin 4x$, d)$\sin 6x$.

24. Представити у вигляді многочлена першого ступеня від тригонометричних функцій кутів, кратних x:
a)$\cos^4 x$, b)$\cos^6 x$, c)$\sin^3 x$, d)$\sin^5 x$.

Розділ 2

Основні алгебраїчні структури

25. Множина з двох елементів M={a,b} з операцією, заданою таблицею (таблицею Келі)

$\circ$	a	b
a	a	b
b	b	a

утворює групу. Якій елемент в цій групі є нейтральним?

26. Побудувати таблицю Келі для групи з трьох елементів.

27. Множина S самосуміщеннь трикутника утворює групу відносно композиції відображень. Скільки самосуміщень має трикитнік? Побудувати таблицю, що задає операцію на S. Чи буде комутативною група самосуміщень трикутника?

Розділ 3

Подільність натуральних чисел

28. Знайти неповну частку і остачу при діленні цілого числа a на ціле число b, якщо:

    a) $a = 131, \ \ b = 31;$ b) $a = 31, \ \ b = 131;$ c) $a = -131, \ \ b = 31;$
    d) $a = -31, \ b = 131;$ e) $a = 131, \ \ b = -31;$ f) $a = 31, \ \ b = -131;$
    g) $a = -31, \ \ b = -131;$ h) $a = -131, \ \ b = -31.$

29. При діленні цілого числа a на ціле число b дістають неповну частку q і остачу r. Знайти b та q, якщо:
    а) $a = 100, \ \ r = 6;$ б) $a = 148, \ \ r = 37;$ в) $a = 298, \ \ r = 10;$
    г) $a = 497, \ \ r = 16;$ д) $a = 28, \ \ r = 2;$ е) $a = 14, \ \ r = 14.$

30. Довести, що:

    а) квадрат непарного цілого числа при діленні на 8 дає остачу 1;

    б) сума квадратів двох послідовних цілих чисел при діленні на 4 дає остачу 1;

    в) числа виду $3k + 2, \ \ k \in Z$ не можуть бути квадратами цілих чисел;

    г) сума квадратів двох непарних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа;

    д) $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться на 10 при будь-якому натуральному n.

    е) сума квадратів п'яти послідовних цілих чисел не може бути квадратом цілого числа;

    є) якщо остача від ділення деякого цілого числа на 9 є одне із чисел 2, 3, 5, 6, 8, то це число не може бути квадратом цілого числа;

    ж) якщо чисельник дробу є різниця квадратів двох непарних цілих чисел, а знаменник – сума квадратів цих чисел, то такий дріб можна завжди скоротити на 2, але не на 4.

31. Натуральне число при діленні на 11 має остачу 4. Довести, що його квадрат при діленні на 11 має остачу 5.

32. Натуральне число при діленні на 5 має остачу 4. Довести,

    що сума куба цього числа та його квадрату ділиться на 5.

33. Натуральне число при діленні на 5 має остачу 1, а друге число при діленні на 5 має остачу 2. Довести, що сума квадратів цих чисел ділиться на 5.

34. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

35. Чи може в натуральному ряду чисел стояти підряд 10 складених чисел?

36. Довести, що кожне натуральне складене число n має власний дільник, що не перевищує $\sqrt{n}$.

37. Чи є числа 127, 919, 1033, 1643, 1657, 2647, 2773, 3163, 3621, 3623, 3631, 3763, 3767, 3769, 7429 простими?

38. За допомогою ''решета Ератосфена '' знайти всі прості числа з проміжку: a)$[801, 821]$; b) $[1445, 1467]$; c) $[973, 999]$.

39. Довести, що дане число a є складеним, якщо:

    а) $a = 2^{30} - 1$;

    б) $a = n^4 + 4$, $n \neq \pm 1$ (теорема Софії Жермен);

    в) $a = n^4 + n^2 + 1$, $n > 1$.

40. Знайти показник степеня простого числа p, яке міститься в добутку $n!$, якщо:

    а) $p = 3$, $n = 100$;
    б) $p = 11$, $n = 1000$;
    в) $p = 13$, $n = 10000$;
    г) $p = 7$, $n = 81561$.

41. Знайти всі такі прості числа p, щоб простими також були числа: a) $p + 5$; b) $2p^2 + 1$; c) $p^2 + 8$; d) $p + 10$ і $p + 14$; e) p, $4p^2 + 1$ і $6p^2 + 1$.

42. Довести, що одночасно не можуть бути простими числа: a)$p + 5$ і $p + 10$; b) p, $p + 2$ і $p + 5$.

43. Знайти канонічний розклад чисел: а) 111; б)3680; в) 2156; г) 18!; д) 40!; е) 75!.

44. Скількома нулями закінчується число $n!$, якщо: а) $n = 50$; б) $n = 123$; в) $n = 1985$?

45. Розкласти на прості множники число:
а)$2^9 + 3^9$; а)$4^{18} - 3^{18}$; а)$5^6 + 3^6$.

46. Довести, що якщо $p,\ q \geq 3$ — прості числа, то $p^2 - q^2$ ділиться на 24.

47. Довести, що якщо $p \geq 5$ — просте число, то $p^2 - 1$ ділиться на 24.

48. Довести, що з п'яти послідовних цілих чисел завжди можна вибрати одне, взаємно просте з усіма іншими.

49. Довести, що добуток п'яти послідовних цілих чисел завжди ділиться а) на 30; b) на 120.

50. Знайти найбільший спільний дільник (НСД) чисел:

$a)0$ і -7; $b) - 231$ і 546; $c)1001$ і 6253; $d)1173$ і 323.

51. Знайти найменше спільне кратне (НСК) чисел:

а) 0 і 1; b) 360 і 504;

с) двох послідовних цілих чисел n і $n + 1$.

52. Знайти лінійне зображення НСД чисел:

а)899 і 493; b) 1445 і 629; c) 903 і 731; d) 1786 і 705.

53. Знайти найбільший спільний дільник (НСД) чисел:
a) $2a + 13$ і $a + 7$;
b) $a^n - 1$ і $a^m - 1$, якщо a– ціле, m і n – натуральні числа;
c) $a^2 + 1$ і $2a + 3$, якщо a – ціле число;
d) $2^{100} - 1$ і $2^{120} - 1$.

54. Знайти загальний розв'язок лінійного діофантового рівняння:
а)$3x + 5y = 11$; b)$14x + 2y = 15$; c)$1990x - 173y = 11$; d)$-2x + 11y = 13$.

55. Знайти всі натуральні розв'язки лінійного діофантового рівняння:
а)$-3x + 5y = 7$; b)$6x - 3y = 2$; c)$3x - 2y = 13$.

56. Чи може число, яке записується за допомогою 100 нулів, 100 двійок і 100 одиниць бути точним квадратом?

57. $56a = 65b$. Доведіть, що $a + b$ — складене число.

58. Довести, що:

а) $2903^n – 803^n – 464^n + 261^n \ \vdots\ 1897$, якщо n – натуральне число;

б) $n(n+1)(n+2) \ \vdots\ 504$, якщо $n+1$ є кубом деякого натурального числа;

в) $a^{4n+1} – a \ \vdots\ 30$, якщо a – ціле, а n – невід'ємне ціле число;

г) $a^3 - b^3 \ \vdots\ 2^n$ тоді і тільки тоді, коли $(a-b) \ \vdots\ 2^n$, де a, b – цілі непарні числа, n – натуральне число;

д) $(a+1, a^{2k}+1) = 1$, якщо a – парне натуральне число, k – довільне натуральне число.

59. Довести, що: а) $288! \ \vdots\ (16!)^{18}$; б) $288! \ \vdots\ (18!)^{16}$; в) $C_{10000}^{5000} \vdots 7$; е) $(n!)! \ \vdots\ (n!)^{(n-1)!}$

3.1 Теорія конґруенцій. Теорема Ейлера. Мала теорема Ферма. Китайська теорема про лишки.

60. Довести, що $11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ ділиться на 10.

61. Довести, що якщо n не ділиться 7, $n \in Z$, то або $(n^3 - 1)$ ділиться на 7, або $(n^3 + 1)$ ділиться на 7 .

62. Довести, що 11^6+14^6-13^{63} ділиться на 10.

63. Знайти остачу від ділення $2^{100} + 3^{102}$ на 101.

64. Знайти остачу від ділення $8^{900} + 9^{800}$ на 29.

65. Знайти остачу від ділення $10^{100} + 12^{102}$ на 13.

66. Довести, що $7^{120} - 1$ ділиться на 143.

67. Нехай n — натуральне число, що не є кратним 17. Довести, що або $n^8 - 1$ або $n^8 + 1$ ділиться на 17.

68. Довести, що

а) $43^{101} + 23^{11}$ ділиться на 66;
б) $a^n + b^n$ ділиться на $a + b$, якщо n — деяке натуральне, непарне число.

69. Довести, що $300^{3000} - 1$ ділиться на 1001.

70. Знайти остачу при ділені на 8 числа $333^{333^{333}}$.

71. Знайти остачу при ділені на 12 числа $2005^{2007} + 2007^{2005}$.

72. Довести, що $2222^{5555} + 5555^{2222}$ ділиться на 7.

73. Знайти останню цифру числа 7^{7^7}.

74. Знайти остачу від ділення $2^{100} + 4^{200} + 8^{400}$ на 3.

75. Довести, що $30^{99^{99}} + 61^{100^{100^{100}}}$ ділиться на 31.

76. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 13: $\overline{2}x^2 - \overline{3}x + \overline{1} = 0$.

77. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 3: $x^2 - \overline{2}x + \overline{4} = 0$.

78. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 11: $\overline{2}x^2 + \overline{5}x + \overline{4} = 0$.

79. Розв'язати рівняння в кільці лишків за модулем 7: $x^2 - \overline{2}x + \overline{5} = 0$.

80. Виписати деяку зведену систему лишків за модулем 8.

81. Скільки чисел містить зведена система лишків за модулем 8!?

82. Чи утворюють числа 2, 25, 251, 3, 34, 346, 23468, 3460, 2519, 25197 повну систему лишків за модулем 10?

83. Чи утворюють числа 1!, 2!, 3!, 4!, ..., 10! повну систему лишків за модулем 10?

84. Чи утворюють числа 1!, 2!, 3!, 4!, ..., 10! зведену систему лишків за модулем 11?

85. Чи утворюють числа $2^0, 2^1, 2^3, 2^4, \ldots, 2^10$ повну систему лишків за модулем 11?

86. Для яких n зведена система лишків за модулем n містить рівно 6 чисел?

87. Для яких n зведена система лишків за модулем n містить рівно 4 числа?

88. Довести, що добуток трьох послідовних чисел, середнє з яких є точним кубом, завжди ділиться на 504?

89. Для яких простих чисел p виконується умова $p|(2^p + 999)$?

90. Нехай p і q — різні прості числа. Довести, що конґруенція

$$a^{p+q-2} + 1 \equiv a^{p-1} + a^{q-1} (mod pq)$$

виконується тоді і лише тоді коли a взаємно просте з pq.

91. Довести, що для кожного натурального числа $k > 1$ виконується конґруенція $2^{2^k} \equiv 6 (mod 10)$.

92. Довести, що якщо для деяких цілих чисел m і n виконується рівність $a^{6m} + a^{6m} \equiv (mod 7)$, то a ділиться на 7.

93. За допомогою китайської теореми про лишки розв'язати систему конґруенцій:

a) $\begin{cases} x \equiv & 2 \pmod 5 \\ x \equiv & 3 \pmod 4 \\ x \equiv & 5 \pmod 7 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x \equiv & 4 \pmod 7 \\ x \equiv & 2 \pmod 3 \\ x \equiv & 3 \pmod{11} \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x \equiv & 4 \pmod 7 \\ x \equiv & 3 \pmod 6 \\ x \equiv & 2 \pmod 5 \end{cases}$, d) $\begin{cases} x \equiv & 2 \pmod 3 \\ x \equiv & 4 \pmod 5 \\ x \equiv & 7 \pmod{11} \end{cases}$.

94. Розв'язати конґруенції:

a)$105x \equiv 37 \pmod{100}$; b)$10x \equiv 5 \pmod{15}$; c) $12x \equiv 24 \pmod 8$.

Розділ 4

Побудова кільця многочленів від однієї змінної.

4.1 Подільність многочленів.Алгоритм Евкліда

95. Поділити з остачею:
a) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ на $x^2 - 3x + 1$;
b) $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

96. Знайти частку і остачу від ділення:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $g(x) = x - 1$ в кільці $\mathcal{Z}[x]$;

б) $f(x) = 4x^4 + x^3$ на $g(x) = x + 1 + i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$;

в) $f(x) = \overline{6}x^6 + x^5 + \overline{1}$ на $g(x) = x + \overline{3}$ в кільці $\mathcal{Z}_7[x]$.

97. Знайти значення многочлена $f(x)$ з кільця $\mathcal{K}[x]$ в точці $x = x_0$, якщо:

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16,\ x_0 = 4,\ \mathcal{K} = \mathcal{Z}$;

б) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7,\ x_0 = -2 - i,\ \mathcal{K} = \mathcal{C}$;

в) $f(x) = x^5 + x^4 + \overline{3}x^2 + \overline{1}\ \ , x_0 = \overline{3}\ , \mathcal{K} = \mathcal{Z}_5$;

г) $f(x) = x^3 - (1 + \sqrt{2})x^2 + (1 + \sqrt{2}),\ x_0 = 1 - \sqrt{2},\ K = Q(\sqrt{2})$.

98. Знайти остачу від ділення многочлена $f(x) = x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$ на двочлени:
а) $g(x) = x + i$;
б) $g(x) = x^2 + 1$.

99. Розкласти многочлен $f(x)$ за степенями двочлена $g(x) = x - a$, якщо:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1,\ \ a = 1$ в кільці $\mathcal{Q}[x]$;

б) $f(x) = \overline{2}x^4 + x^3 + x^2 + \overline{2}, a = \overline{1}$ в кільці $\mathcal{Z}_3[x]$;

в) $f(x) = x^5 - 3ix^3 - 4x^2 + 5ix - 1,\ \ a = -i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$;

г) $f(x) = x^5,\ \ a = -1$ в кільці $\mathcal{Q}[x]$;

г) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7 + i,\ \ a = -i$ в кільці $\mathcal{C}[x]$.

100. Розкласти:

а) $f(x) = x^6 - 4x^5 - 7x^4 + x^3 + 2x^2 - x - 1$ за степенями двочлена $g(x) = x^2 - 1$ в кільці $\mathcal{Z}[x]$;

б) $f(x) = x^7 + \overline{1}$ за степенями двочлена $g(x) = x^3 + \overline{2}$в кільці $\mathcal{Z}_5[x]$;

в) $f(x) = x^3 - 2x + i$ за степенями двочлена $g(x) = x^3 + i$в кільці $\mathcal{C}[x]$.

101. Чому дорівнює показник кратності кореня:
а) 2 для многочлена $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;
б) -2 для многочлена $x^5 + 7x^4 + 16x^3 + x^2 - 16x - 16$?

102. Визначити A і B так, щоб многочлен $Ax^4 + Bx^3 + 1$ ділився на $(x-1)^2$.

103. Знайти найбільший спільний дільник многочленів в кільці $\mathcal{Q}[x]$;:
а)$x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ і $x^3 + x^2 - x - 1$;
б) $x^4 - 4x^3 + 1$ і $x^3 - 3x^2 + 1$;
в)$x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1$ і $3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.

104. Використовуючи алгоритм Евкліда підібрати многочлени $M_1(x)$ і $M_2(x)$ так, щоб $f_1(x) \cdot M_2(x) + f_2(x) \cdot M_1(x) = \delta(x)$, де $\delta(x)$ найбільший спільний дільник $f_1(x)$ і $f_2(x)$:
а) $f_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,\qquad f_2(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$;
b) $f_1(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,\qquad f_2(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$;
c) $f_1(x) = 3x^7 + 6x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 14x^3 - 6x^2 - 4x + 4,\qquad f_2(x) = 3x^6 - 3x^4 + 7x^3 - 6x + 2$;
d) $f_1(x) = x^6 - 4x^5 + 11x^4 - 27x^3 + 37x^2 - 35x + 35,\qquad f_2(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 10x - 25$.

105. Використовуючи алгоритм Евкліда підібрати многочлени $M_1(x)$ і $M_2(x)$ так, щоб $f_1(x) \cdot M_2(x) + f_2(x) \cdot M_1(x) = 1$:

а)$f_1(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,\qquad f_2(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$;

b) $f_1(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,\qquad f_2(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$;

c) $f_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,\qquad f_2(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$;

d) $f_1(x) = x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 7x^2 + 5x + 3,\qquad f_2(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

106. Знайти найбільший спільний дільник многочленів f і g та його зображення через f і g в кільці $Z_2[x]$:
а) $f = x^5 + x^4 + 1$ і $g = x^4 + x^2 + 1$;

б) $f = x^5 + x^3 + x \quad \text{і} \quad g = x^4 + x + 1$;
в) $f = x^5 + 1 \quad \text{і} \quad g = x^5 + x^3 + 1$.

107. Визначити A і B так, щоб многочлен $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ ділився на многочлен $(x-1)^2$.

108. Довести, що у многочлена

a) $x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$;

b) $x^{2n+1} - (2n+1)x^{n+1} + (2n+1)x^n - 1$;

1 є коренем кратності 3.

109. Довести, що якщо поліном $x^n + ax^{n-m} + b$ має корінь, відмінні від нуля, то кратність цього кореня не більше 2.

110. Виписати найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне многочленів:

a) $(x-1)^3(x+1)^2(x-3)(x+4)^3$ і $(x^2-1)^2(x+2)^2(x+3)(x-4)^3$;

b) $(x+1)^5(x-1)^2(x^2-4)(x+4)^3$ і $(x-1)^2(x-2)^2(x+3)^2(x+4)^2$.

111. Знайти найбільший спільний дільник многочлена і його похідної:

a) $(x-1)^4(x+1)^5(x-3)(x+4)^2$;

b) $(x+1)^5(x^2-1)^2(x-4)(x+4)^5$.

112. Довести, що $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ ділиться на $x^2 + x + 1$.

113. При якому m $x^{2m} + x^m + 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$?

114. При якому m $(x+1)^m + x^m + 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$?

115. При якому m $(x+1)^m - x^m - 1$ ділиться на $x^2 + x + 1$?

116. При якому m $(x+1)^m + x^m + 1$ ділиться на $(x^2 + x + 1)^2$?

117. При якому m $(x+1)^m - x^m - 1$ ділиться на $(x^2 + x + 1)^2$?

118. При якому m $(x+1)^m - x^m - 1$ і $(x+1)^m + x^m + 1$ діляться на $(x^2+x+1)^3$?

119. Відокремити кратні множники многочленів:

a) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$;

b) $x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$;

c) $x^6 + 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$;

d) $x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$.

Розділ 5

Скінченні поля. Розширення полів.

120. Побудувати розширення поля $\mathbb{Z}_2$ за допомогою приєднання кореня незвідного многочлена $x^2 + x + 1$.

121. Побудувати розширення поля $\mathbb{Z}_3$ за допомогою приєднання кореня незвідного многочлена $x^2 + x + 2$.

122. Побудувати розширення поля $\mathbb{Z}_2$ за допомогою приєднання кореня незвідного многочлена $x^3 + x + 1$.

123. Побудувати розширення поля $\mathbb{Z}_3$ за допомогою приєднання кореня незвідного многочлена $x^3 + 2x + 1$.

124. В полі, отриманому приєднанням до поля Z_2 кореня α многочлена x^3+x+1 знайти елемент, обернений до $\beta = \alpha + 1$.

125. В полі, отриманому приєднанням до поля Z_5 кореня α многочлена $x^3 + 2x + 1$ знайти елемент, обернений до $\beta = 2\alpha + 1$.

126. В полі, отриманому приєднанням до поля Z_5 кореня α многочлена $x^3 + 2x + 1$ знайти елемент, обернений до $\beta = \alpha^2 + 1$.

127. В полі, отриманому приєднанням до поля Z_5 кореня α многочлена $x^3 + 2x + 1$ знайти елемент, обернений до $\beta = 3\alpha^2 + 2$.

128. Довести, що числа вигляду $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ з $a, b, c \in \mathbb{Q}$ утворюють поле, причому кожен елемент цього поля в такому вигляді можна представити однозначно. Знайти елемент обернений до $1 - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}$.

129. Довести, що числа вигляду $a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25}$ з $a, b, c \in \mathbb{Q}$ утворюють поле, причому кожен елемент цього поля в такому вигляді можна представити однозначно. Знайти елемент обернений до $2 + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{25}$.

130. В полі, отриманому приєднанням до поля $\mathbb{Q}$ кореня α многочлена x^3+2x+1 знайти елемент, обернений до $\beta = 3\alpha^2 + 2$.

131. В полі, отриманому приєднанням до поля $\mathbb{Q}$ кореня α многочлена x^3+5x+1 знайти елемент, обернений до $\beta = \alpha + 1$.

132. Дослідити систему, задану над полем F_4, знайти загальний розв'язок системи
$\overline{s}x + (\overline{s+1})y + z = \overline{1}$
$(\overline{s+1})x + y + \overline{s}z = \overline{s}$
$x + \overline{s}y + (\overline{s+1})z = (\overline{s+1})$.

133. Дослідити систему, задану над полем F_8, знайти загальний розв'язок системи
$\overline{s}^2x + (\overline{s+1})y + z = \overline{1}$
$(\overline{s+1})x + y + \overline{s}^2z = \overline{s}$
$x + \overline{s}^2y + (\overline{s+1})z = \overline{s}^2$.

134. Дослідити систему, задану над полем F_{16}, знайти загальний розв'язок системи
$\overline{s}^2x + \overline{s}y = \overline{1}$
$\overline{s}^3x + y = \overline{s}^3$.

Розділ 6

Раціональні корені многочленів. Звідність і незвідність многочленів в полі раціональних чисел.

135.

Розділ 7

Симетричні многочлени.

136. Виразити через основні симетричні многочлени такі поліноми:

   a) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3$;

   b) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$;

   c) $x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2 + x_3^2 + x_3$;

   d) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$;

   e) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$;

   f) $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$.

137. Виразити через основні симетричні многочлени такі моногенні поліноми:

   a) $x_1^2 + \ldots$;

   b) $x_1^2x_2 + \ldots$;

   c) $x_1^3 + \ldots$;

   d) $x_1^2x_2x_3 + \ldots$;

   e) $x_1^4 + \ldots$;

   f) $x_1^2x_2^2x_3 + \ldots$.

138. Найти значення симетричного многочлена F від коренів $f(x)$:

   a)$F(x) = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2, \quad f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 1.$

   b)$F(x) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2, \quad f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 - 5.$

139. Розв'язати над полем комплексних чисел систему рівнянь:

   a) $$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24 \end{array}$$

b) $$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - x_1x_2x_3 = -4 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3 \end{cases}$$