НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
"КИЄВО–МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ"

Боднарчук Ю.В., Олійник Б.В.

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

(для студентів-інформатиків)

Київ — 2009

Зміст

Передмова

Лінійна алгебра та аналітична геометрія відіграють фундаментальну роль в математичній освіті. Адже поняття абстрактного векторного простору, вектора, як його елемента, базису та координат вектора в базисі, лінійних та полілінійних відображень використовують всі галузі математики, та комп'ютерних наук. Дуже важливо, на наш погляд, привчити студента до того, що важливішими за сутність об'єктів (направлені відрізки, масиви, послідовності, функції, множини, оператори) є операції, задані на об'єктах, і властивості цих операцій. Особливістю цього посібника є те, що поняття лінійної алгебри зразу розглядаються над довільним полем, зокрема скінченним, яке в певних ситуаціях можна замінити кільцем, наприклад кільцем лишків. Такий підхід дозволяє швидко переходити до задач надлишкового кодування (лінійні коди), а також криптографії (афінні шифри), які базуються на лінійній алгебрі над скінченними полями та кільцями.

При викладенні матеріалу широко використовуються поняття та факти дискретної математики, особливо відношення еквівалентності, та математичного аналізу, які були прослухані раніше.

Всі теореми наведені з повним доведенням, оскільки саме вони і дають справжню глибину розуміння матеріалу. Підбір задач, наведений після кожного розділу, також має сприяти цьому розумінню. Аналітична геометрія по суті є вплетеною в лінійну алгебру, як пропедевтика ідей останньої в малих розмірностях.

Після курсу "Лінійна алгебра та аналітична геометрія"студент має прослухати наступні математичні курси — алгебра і теорія чисел, математичний аналіз, аналіз функцій багатьох змінних, теорія алгоритмів та математична логіка, теорія ймовірностей та математична статистика, а також курси з інформатики — основи комп'ютерних алгоритмів, принципи роботи комп'ютерних систем, основи програмування та алгоритмічні мови, організація баз даних і знань, системи кодування інформації, символьні обчислення та комп'ютерна алгебра, функціональне програмування, логічне програмування, які весь час звертаються до понять та методів лінійної алгебри.

Саме тому передбачається, що цей посібник стане настільним довідником студента факультету інформатики, як спеціальності програмна інженерія так і прикладна математика, протягом усього його навчання і в бакалавраті, і в магістеріумі.

Частина задач, наведених у посібнику, є авторськими, а частину взято авторами з різноманітних джерел. Зокрема, багато задач запозичено з [5], [8], [6] тощо.

Вступ

Оскільки лінійна алгебра будується над такими структурами як кільця та поля, то перший розділ посібника і присвячений цим поняттям. Численні приклади, як скінченні так і нескінченні, повинні принести розуміння того, що операції додавання та множення можна розумно здійснювати не тільки над звичайними числами, чому вчать в школі, але і над значно об'єктами більш складної природи. Найбільш важливими є кільця лишків, поліномів, а також поле комплексних чисел та скінченні поля в їх поліноміальній реалізації.

Другий розділ оперує з поняттями алгебраїчної множини та афінного многовиду, які ще нещодавно були термінами алгебраїчної геометрії. Зауважимо, що алгебраїчна геометрія над скінченними полями знайшла широке застосування в новітній теорії надлишкового кодування та криптографії. В цьому розділі розглядаються лише лінійні та квадратичні многовиди (квадрики), наводяться їх геометричні властивості. Важливою є задача параметризації многовидів, особливо для комп'ютерної графіки. Побудова загального розв'язку системи лінійних рівнянь методом Гауса, або однією з його модифікацій, є по суті параметризацією лінійного афінного многовиду.

Третій розділ присвячений алгебрі матриць, в якому центральне місце займає питання їх оборотності та зв'язок з елементарними перетвореннями над рядками матриць. Матричне представлення дає компактне представлення для системи лінійних рівнянь і короткі доведення теорем, наприклад теореми про структуру розв'язку системи лінійних рівнянь.

Четвертий розділ є центральним, оскільки саме в ньому дається означення абстрактного векторного простору над полем, а також поняття ізоморфізму векторних просторів. При його вивченні слід зрозуміти, що координати у вектора не існують самі по собі, а з'являються лише після обрання певного базису простору. Розгляд підпросторів породжених рядками та стовпчиками матриці дає можливість сформулювати критерій Кронекера - Капелі сумісності системи лінійних рівнянь. Операції над підпросторами дають можливість будувати нові простори, при цьому слід розрізняти внутрішні конструкції від зовнішніх.

Визначник матриці вводяться спочатку геометрично, як функція, яка отримавши на вхід набір векторів, повертає число, яке за модулем дорівнює об'єму паралелепіпеда, що побудований на цих векторах. При цьому властивості полілінійності та кососиметричності виникають природним чином. Важливо, що ці властивості визначають вказану функцію однозначно з точністю до сталого множника. Такий підхід дозволяє досить легко отримати теорему про те що визначник добутку матриць дорівнює добутку їх визначників. Завершується розділ виведенням явних формул для оберненої матриці і розв'язку системи лінійних рівнянь (формули Крамера).

Білінійний функціонал повністю визначається своїми значеннями на парах базисних елементів і при фіксованому базисі йому відповідає білінійна форма. Шостий розділ посібника присвячено білінійним симетричним формам та їх зв'язку з квадратичними формами. Розглянуто метод Лагранжа побудови базису в якому білінійна симетрична форма та відповідна квадратична форма набувають діагонального виду, а також метод Якобі, який дозволяє зразу визначити еквівалентну діагональну форму. Сформульовано і доведено закон інерції квадратичних форм над полем дійсних чисел, який разом з методом Якобі дає критерій додатної визначеності квадратичної форми.

Метризації векторних просторів присвячено наступний розділ. Виникають поняття відстаней та кутів між афінними многовидами. Поняття ортонормованого базису та розкладу по ньому є центральним і має багато застосувань, зокрема ряди Фур'є виникають, як розклади функцій по відповідним системам ортогональним системам поліномів або тригонометричних функцій.

Лінійним відображенням та операторам присвячено сьомий розділ посібника. Питання про побудову базису в якому матриця оператора має найпростіший вигляд відіграє особливо важливу роль як для операторів в звичайному просторі так і в евклідових та унітарних просторах. В цьому контексті вводиться Жорданова нормальна форма, як канонічна форма матриці лінійного оператора над полем комплексних чисел. Для операторів над в евклідових та унітарних просторах важливим є поняття спряженого оператора. Самоспряжені та ортогональні (унітарні) оператори займають тут центральні оператори. Доведено, що над полем комплексних чисел такі оператори завжди діагоналізуються причому в ортонормованому базисі. Це дає можливість дати класифікацію всіх ортогональних операторів, що діють на векторних просторах над полем дійсних чисел.

В якості застосування розглянуто зведення квадратичної форми до головних осей. Це базується на тому, що якщо відповідна білінійна симетрична форма визначають білінійний функціонал в ортонормованому базисі, то при переході до іншого ортонормованого базису матриця форми (яка є симетричною) буде змінюватися так само як і матриця самоспряженого оператора. Це дає можливість звести квадратичну форму до діагонального виду не просто в якому-небудь базисі (як ми це робили в розділі 6), а зробити це в ортонормованому базисі. Елементи цього базису і називають головними вісями. Для звичайного векторного простору (без евклідової структури) це дає можливість сформулювати достатню умову того, що пара білінійних симетричних форм діагоналізуються одночасно.

Важливим геометричним застосуванням викладеної теорії є метод зведення рівнянь квадратичних многовидів (квадрик) до канонічного вигляду, а також їх повна класифікація в розмірностях 2 та 3.

Останній розгляд посібника присвячено білінійним та квадратичним формам, та їх зведенню до канонічного виду різними типами перетворень. Зокрема, зведення квадратичної форми до головних осей з додатковим перенесенням початку координат дає повну класифікацію кривих та поверхонь другого порядку.

Розділ 1

Основні алгебраїчні структури.

Означення 1.0.1. *Бінарною операцією визначеною на множині D називається довільна функція $f = f(x, y)$ від двох змінних, яка визначена на D і приймає значення в D, тобто*

$$f: \quad D \times D \to D.$$

Прикладами бінарних операцій є операції додавання або множення на множинах $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел відповідно, при цьому

$$f(x, y) = x + y, \quad f(x, y) = x \cdot y.$$

Маючи на увазі ці приклади, надалі, замість запису $f(x, y)$ будемо вживати запис

$$x \circ y = f(x, y).$$

Множина з заданою бінарною операцією буде зображуватися як пара $(D, \circ)$.

Означення 1.0.2. *Множина з бінарною операцією $(D, \circ)$ називається* **напівгрупою***, якщо операція $\circ$ є* **асоціативною***, тобто*

$$\forall x \forall y \forall z \quad (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \tag{1.0.1}$$

Означення 1.0.3. *Напівгрупа $(D, \circ)$ називається* **моноїдом***, якщо існує* **нейтральний** *елемент відносно операції $\circ$, тобто*

$$\exists e \ \forall x \quad e \circ x = x \circ e = x. \tag{1.0.2}$$

Означення 1.0.4. *Напівгрупа $(D, \circ)$ називається* **комутативною***, якщо*

$$\forall x \forall y \quad x \circ y = y \circ x. \tag{1.0.3}$$

Означення 1.0.5. *Моноїд $(D, \circ)$ називається* **групою***, якщо будь-який її елемент має* **обернений***, тобто*

$$\forall x \exists x^* \quad x \circ x^* = x^* \circ x = e. \tag{1.0.4}$$

Комутативна група називається **абелевою***.*

Приклад 1.0.1. *Множина натуральних чисел з операцією додавання* $(\mathbb{N}, +)$ *є комутативною напівгрупою, але не є моноїдом, бо нейтральний елемент 0 не належить цій множині; підмножини* $M_k = \{n \in \mathbb{N} | n \geq k\}$ *є замкненими відносно додавання і вони є прикладами напівгруп, але не є моноїдами.*

Приклад 1.0.2. *Множини натуральних чисел з операцією множення* $(\mathbb{N}, \cdot)$ *та раціональних чисел з операцією множення* $(\mathbb{Q}, \cdot)$ *є приклади комутативних моноїдів, нейтральний елементом для множення є* $1 \in \mathbb{N}$.

Приклад 1.0.3. *Множина натуральних чисел з нулем* $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *операцією додавання* $(\bar{\mathbb{N}}, +)$ *є комутативним моноїдом, нейтральний елементом є 0.*

Приклад 1.0.4. *Для довільної множини* M *розглянемо множину* $D = M^M$ *— всіх функцій з множини* M *в себе, тобто* $D = \{f | f : M \to M\}$. *В якості бінарної операції візьмемо композицію функцій:*

$$\forall x \in M \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Самостійно перевірте, що ця операція є асоціативною, тобто має місце (1.0.1). *Більш того,* $\left(M^M, \circ\right)$ *є моноїдом, адже функція* $Id : \forall x \quad Id(x) = x$ *є очевидно нейтральним елементом відносно операції композиції функцій.*

Звернемо уваги на те, що розглянутий вище моноід, при $|M| > 1$, не є комутатвним. Дійсно, нехай $M = \{a, b\}$ і розглянемо функції f, g, які задано таблицею

x	a	b
$f(x)$	b	a
$g(x)$	a	a

Складіть таблиці для функцій $f \circ g$ та $g \circ f$ і переконайтесь, що вони різні.

Легко бачити, що всі вищенаведені приклади напівгруп та моноідів не є групами.

Приклад 1.0.5. *Множина цілих чисел з операцією додавання* $(\mathbb{Z}, +)$ *є абелевою групою.*

Множина раціональних чисел з операцією додавання $(\mathbb{Q}, +)$ *є абелевою групою.*

Якщо замінити операцію додавання на операцію множення, то ці напівгрупи не будуть групами. Для $(\mathbb{Z}, \cdot)$ це очевидно, а для $(\mathbb{Q}, \cdot)$ зауважимо, що 0 не має оберненого елемента відносно множення, причому (1.0.4) не виконується тільки для $x = 0$.

Приклад 1.0.6. *Якщо видалити 0 і розглянути множину* $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *маємо абелеву групу* $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

Ще простішими прикладами груп є

Приклад 1.0.7. $(\{0,1\},\oplus)$, *де* $\oplus$ *— побітове додавання (XOR) та*

$(\{1,-1\},\cdot)$, *де* $\cdot$ *— звичайне множення.*

Приклад 1.0.8. *Нехай* $S(M) \subset M^M$ *підмножина функцій, що є бієкціями множини* M *на себе. Оскільки для кожної бієкції визначена обернена функція, то* $(S(M),\circ)$ *є групою відносно вищезгаданої операції композиції функцій. Ця група називається* **симетричною** *групою на множині* M.

Якщо M — скінченна множина і містить n елементів, то замість запису $S(M)$ вживають S_n.

Вправа 1.0.1. *Скільки елементів містить група* S_n*?*

Зауважимо, що група S_3 є мінімальним (по кількості елементів) прикладом неабелевої групи.

Надалі, якщо ми маємо справу з комутативною напівгрупою, будемо замість $\circ$ вживати $+$ для позначення бінарної операції.

1.1 Множини з двома бінарними операціями

Означення 1.1.1. *Множина* D *з двома бінарними операціями* $(D,+,\circ)$ *називається* **кільцем** *якщо*

i) $(D,+)$ *— абелева група;*

ii) $(D,\circ)$ *— напівгрупа;*

iii) мають місце закони дистрибутивності:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \quad x\circ(y+z) = (x\circ y)+(x\circ z); \tag{1.1.5}$$

$$\forall x\ \forall y\ \forall z \quad (y+z)\circ x = (y\circ x)+(z\circ x). \tag{1.1.6}$$

Якщо $(D,\circ)$ *— комутативна напівгрупа, то кільце називається* **комутативним**, *а якщо* $(D,\circ)$ *— моноід, то говорять, що* $(D,+,\circ)$ *є кільцем з одиницею.*

Лема 1.1.1. *Множина* D^* *оборотних елементів* $d\in D$ *кільця з одиницею, тобто тих, які мають оберенені відносно операції* $\circ$, *для яких*

$$\exists\ \ d^*:\quad d\circ d^* = d^*\circ d = e$$

утворюють групу.

Доведення. Доведення випливає з того, що множина D^* оборотних елементів є замкненою відносно операції $\circ$. Дійсно, якщо a^*, b^* — обернені елементи для елементів $a, b \in D$, то для елемента $a \circ b$ оберненим буде $b^* \circ a^*$. □

Ця група називається **мультиплікативною групою** кільця D і позначається D^*.

Означення 1.1.2. *Кільце $(D, +, \circ)$ називається* **полем,** *якщо $(D \setminus \{0\}, \circ)$ є абелевою групою (тут 0 - нейтральний елемент відносно $+$).*

Приклад 1.1.1. *Кільце цілих чисел із звичайними операціями додавання та множення є прикладом комутативного кільця з одиницею - $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.*

Приклад 1.1.2. *Нагадаємо приклад відношення еквівалентності на множині цілих чисел, який зустрічався в курсі дискретної математики. Нехай $n \in \mathbb{N}, n > 1$, — фіксоване натуральне число. Визначимо бінарне відношення R_n : $(z_1, z_2) \in R_n \Leftrightarrow$ остачі від ділення z_1 та z_2 на n збігаються $\Leftrightarrow$ $z_1 - z_2$ ділиться на n. Розглянемо підмножину $\overline{0} \subset \mathbb{Z}$ чисел які еквівалентні числу 0, за означенням, вона складається з чисел які діляться на n. Елементами підмножини $\overline{1} \subset \mathbb{Z}$ є числа які при діленні на n дають в остачі 1, В такий спосіб ми отримуємо опис фактор-множини:*

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{n-1}\},$$

де $\overline{k}$— є множиною цілих чисел, які при діленні на n дають в остачі k. Для описаного відношення прийнято вживати позначення:

$$x \equiv y \mod n \Leftrightarrow (x, y) \in R_n.$$

Виявляється, що ця множина, як і $\mathbb{Z}$ також має структуру комутативного кільця з одиницею. Відповідні бінарні операції вводяться через представників класів еквівалентності, а саме за означенням:

$$\forall x\ \forall y \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$

$$\forall x\ \forall y \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}.$$

Доведіть, що так введені операції $+, \cdot$ на множині $\mathbb{Z}_n$ не залежить від вибору представників класів $x \in \overline{x}, y \in \overline{y}$.

Приклад 1.1.3. *Найменшим нетривіальним прикладом кільця є $\mathbb{Z}_2$, а оскільки воно є полем (покажіть це), то його часто позначають як $\mathbb{F}_2$ $(F = field)$.*

Приклад 1.1.4. *Виявляється, що $\mathbb{Z}_n$ є полем тоді і тільки тоді, коли n-просте число. Наприклад, $\mathbb{Z}_3$ буде полем, а $\mathbb{Z}_4$ ні (Чому?).*

Приклад 1.1.5. *Прикладами полів є* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $\;$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ − *множини раціональних та дійсних чисел відносно звичайних операцій додавання та множення.*

Приклад 1.1.6. *Нехай* $(\mathbb{F}, +, \circ)$ — *поле (наприклад одне з вищезгаданих), розглянемо множину поліномів від змінної* x :

$$\mathbb{F}[x] = \{f(x) = c_m x^m + \ldots + c_1 x + c_0 | c_i \in F,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m,\ m = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Операції додавання та множення поліномів вводяться звичайним чином і отримуємо ще один приклад комутативного кільця з одиницею - $(F[x], +, \cdot)$. *Що тут буде одиницею?*

Нагадаємо, що крім додавання та множення над поліномами можна виконувати операцію ділення з остачею. Це дає можливість по аналогії з прикладом 1.1.2 будувати нові приклади кілець та полів.

Приклад 1.1.7. *Нехай* $\mathbb{F}_2$ — *згадане вище поле з двох елементів і розглянемо кільце поліномів* $\mathbb{F}_2[x]$. *Зафіксуємо поліном* $\phi(x) = x^2 + x + 1 \in F_2[x]$ *і побудуємо відношення еквівалентності на множині* $\mathbb{F}_2[x]$ *наступним чином: поліноми* $u(x)$ *та* $v(x)$ *еквівалентні, якщо вони мають однакові остачі при діленні на* $\phi(x)$. *Оскільки, степінь остачі менша за степінь дільника, то елементами фактор-множини будуть* $\overline{0}, \overline{1}, \overline{x}, \overline{x+1}$. *Операції додавання та множення можна ввести через представників класів: позначимо* $s = \overline{x}$, *тоді отриману фактор-множину (позначимо її через* $\mathbb{F}_4$*) можна ототожнити з множиною поліномів від змінної* s *степінь яких не перевищує* 1, *тобто*

$$\mathbb{F}_4 = \{as + b | a, b \in \mathbb{F}_2\}.$$

Операція додавання є звичайним додаванням поліномів, а множення слід виконувати в два етапи: спочатку виконати звичайне множення поліномів, а потім взяти остачу від ділення отриманого результату на поліном $\phi(s)$. *Виявляється, що* $\mathbb{F}_4$ *з так введеними операціями додавання та множення є полем. Довести це.*

Приклад 1.1.8. *Якщо в попередньому прикладі замінити поліном другого степеня на поліном третього степеня* $\phi(x) = x^3 + x + 1$, *то описана вище конструкція приведе нас до поля* $\mathbb{F}_8$:

$$\mathbb{F}_8 = \{as^2 + bs + c | a, b, c \in \mathbb{F}_2\},$$

елементи якого можна ототожнити з трійками бітів -as^2*+*bs*+*c $\leftrightarrow (a, b, c)$. *Доведіть, що* $\mathbb{F}_8$ *з відповідними операціями додавання та множення є полем.*

Приклад 1.1.9. *Розглянемо кільце поліномів* $\mathbb{R}[x]$ *з дійсними коефіцієнтами і покладемо* $\phi(x) = x^2 + 1$. *По аналогії з прикладом введемо відношення еквівалентності і розглянемо відповідну фактор-множину, яку можна ототожнити з множиною остач:* $\{a + bx | a, b \in \mathbb{R}\}$. *Замість* s *введемо змінну* $i = \overline{x}$, *тоді елементи фактор-множини можна ототожнити з поліномами відносно змінної* i, *степінь яких не перевищує 1, а операції додавання і множення вводяться в той же спосіб, що і з попередніх прикладах, тобто*

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i,$$

тут ми врахували, що остача від ділення i^2 *на* $i^2 + 1$ *дорівнює* -1. *Так отримана множина*

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$$

є полем (довести це), яке називається полем комплексних чисел.

Приклад 1.1.10. *Нехай* $\mathbb{F}$ *— довільне поле і* $\mathbb{F}[x]$ *— кільце поліномів над ним. Розглянемо дроби виду* $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f \in \mathbb{F}[x], g \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0(x)\}$ *(*$0(x)$*- поліном всі коефіцієнти якого дорівнюють* $0 \in F$*). На множині таких дробів введемо відношення еквівалентності:*

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \cdot g_2(x) = f_2(x) \cdot g_1(x).$$

Покажіть, що це дійсно відношення еквівалентності. Відповідну фактор множину можна ототожнити з множиною нескоротних дробів

$$\mathbb{F}(x) = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \;\; | \;\; f \in F[x], g \in F[x] \setminus \{0(x)\} \right\}.$$

Додавання та множення вводяться на природним чином і виявляється, що відносно цих операцій $\mathbb{F}(x)$ *є полем, яке називається* **полем раціональних функцій від однієї змінної** *над* $\mathbb{F}$. *Доведіть, що* $\mathbb{F}(x)$ *дійсно є полем.*

1.2 Задачі

1. Чи утворюють групи такі множини, з заданими на них бінарними операціями:
   1) $(N \cup \{0\}, +)$;
   2) $(\{2^n | \; n \in N\}, *)$;
   3) $(\{2^n | \; n \in Z\}, *)$;
   4) $(Z, *)$.

2. Перевірити, що множення комплексних чисел є асоціативним, тобто
$((a+ib)\cdot(c+id))\cdot(u+iv)=(a+ib)\cdot((c+id)\cdot(u+iv))$

3. Перевірити, що множення комплексних чисел є дистрибутивним відносно додавання, тобто:
$(a+ib)((c+id)+(u+iv))=(a+ib)(c+id)+(a+ib)(u+iv)$ -

4. Перевірити, чи утворюють поле такі множини з заданими на них бінарними операціями:
1) $(N\cup\{0\},+,*)$;
2) $(\{2^n|\ n\in Z\},+,*)$;
3) $(\{(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})|\ a,b,c\in R\},+,*)$.

5. Довести, що якщо P — підполе поля раціональних чисел Q, то або $P=Q$, або поле P складається тільки з одного елемента.

6. Знайти дійсні x і y, якщо відомо що
$$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i.$$

7. Знайти комплексне число z, що є розв'язком рівняння:
1)(2+3i)z + 5+6i= 7+8i,
2)(1+3i)z + 4+6i= 2+8i.

8. Знайти всі комлексні числа z, для яких виконується рівність
$$\overline{z}=z^2.$$

9. Обчислити:
$$1)\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1};\qquad 2)\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\qquad 3)\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}.$$

10. Представити в тригонометричній формі такі комплексні числа
$a)1$; $b)-1$; $c)i$; $d)-i$; $e)1+i$; $f)1-i$; $g)-1+i$;
$h)1+\sqrt{3}i$; $i)1-\sqrt{3}i$; $j)-3\pi$; $k)-1-\sqrt{3}i$.

11. Знайти корені 4-го степеня з числа $z=-16$ та зобразити їх на комплексній площині.

12. Знайти корені 3-го степеня з числа $z=-i$ та зобразити їх на комплексній площині.

13. Зобразити множину точок, що задовольняють нерівностям:
а) $1\le|z|<2$;
б) $|z-1-i|<1,\ \frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$

14. Зобразити множину точок, що задовольняють нерівності $0 < \arg z < \frac{5\pi}{6}$, $|z| < 1$.

15. Довести тотожність

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2).$$

Пояснити, який геометричний зміст має ця тотожність.

16. Обчислити

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}, \qquad \left(\frac{7 - 6i}{6 + 7i}\right)^{28}, \qquad \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}.$$

17. Обчислити

$$\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(\sqrt{3} - i)^{20}}, \qquad \frac{(2\sqrt{3} - 2i)^{30}}{(1 + \sqrt{3}i)^{20}}.$$

18. Обчислити i^n, для деякого $n \in \mathbf{N}$.

19. Знайти z, якщо
a)$z^2 = 8 + 6i$, b)$z^3 = i$, c)$z^4 = -1$, d)$z^5 = -1 + \sqrt{3}i$, e)$z^6 = \frac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

20. Знайти всі розв'язки рівняння в полі F_4:
1) $(s + 1)x + s = s + 1$;
2) $sx + s = s + 1$;
3) $sx + s = 1$.

21. Довести, що корені n-го степеня з 1 утворюють групу відносно множення (тобто, добуток двох коренів n-го степеня з 1 знову є коренем n-го степеня з 1, і виконуються відповідні аксіоми).

22. Виписати всі корені з 1 степеня
a)2; b)3; c)4; d)6; e)8.
Вказати, які з цих коренів будуть первісними.

23. Виписати всі первісні корені з 1 12-го степеня.

24. Знайти суму коренів 6-го степеня з 1.

25. Знайти суму коренів n-го степеня з 1.

26. Обчислити $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + ... + a^k\cos k\varphi$.

27. Довести, що $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

28. Довести $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

29. Виразити через $\cos x$ і $\sin x$:
    a)$\cos 3x$, b)$\cos 5x$, c)$\sin 4x$, d)$\sin 6x$.

30. Представити у вигляді многочлена першого ступеня від тригонометричних функцій кутів, кратних x:
    a)$\cos^4 x$, b)$\cos^6 x$, c)$\sin^3 x$, d)$\sin^5 x$.

Розділ 2

Афінні многовиди

Нехай $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ — поле.

Означення 2.0.1. *1. Сукупність рівнянь виду*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 + & \ldots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 + & \ldots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 + & \ldots + & a_{3n}x_n = & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & a_{m3}x_3 + & \ldots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{cases}, \tag{2.0.1}$$

де x_i− невідомі, а $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$− коефіцієнти $(i = 1, 2, \ldots m, j = 1, 2, \ldots n)$ називають **системою лінійних рівнянь** *над полем $\mathbb{F}$.*

Якщо праві частини рівнянь є нульовими: $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система називається **однорідною.**

2. Набір $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_n^*)$, $\ x_i^* \in \mathbb{F}$, називається **розв'язком** *системи лінійних рівнянь (2.0.1) якщо для всіх $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ виконуються рівності*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = b_i.$$

3. Множина розв'язків системи лінійних рівнянь називається **лінійним афінним многовидом** *над полем $\mathbb{F}$.*

Приклад 2.0.1. *Порожня множина $\varnothing$ є прикладом лінійного афінного многовиду, оскільки є множиною розв'язків системи рівнянь, яка містить одне рівняння*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 1.$$

Приклад 2.0.2. *Множина $\mathbb{F}^n = \underbrace{\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F}}_{n}$, яка складається з усіх можливих наборів є також прикладом лінійного афінного многовиду, оскільки є множиною розв'язків системи рівнянь, яка рівняння*

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0.$$

Означення 2.0.2. *Цей лінійний афінний многовид* $\mathbb{F}^n = \underbrace{\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F}}_{n}$ *називається* **афінним простором** *над полем* $\mathbb{F}$ *і позначається* $A_n(\mathbb{F})$ *або просто* A_n*, якщо зрозуміло над яким полем він розглядається.*

Приклад 2.0.3. *Розглянемо систему лінійних рівнянь виду* $\begin{cases} x_1 & = & b_1 \\ x_2 & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & = & b_n \end{cases}$.

Вона очевидно має єдиний розв'язок - точку $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in A_n$ *афінного простору. Отже, точки афінного простору є прикладами афінних многовидів.*

Означення 2.0.3. *Лінійний афінний многовид, який визначається одним рівнянням*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots a_nx_n = b, \tag{2.0.2}$$

де не всі коефіцієнти a_i *дорівнюють нулю, називають* **гіперплощиною** *в афінному просторі* $A_n(\mathbb{F})$.

Приклад 2.0.4. *Нехай* $\mathbb{F} = \mathbb{R}-$ *поле дійсних чисел і* $n = 2$*, тоді гіперплощина, яка визначається рівнянням*

$$a_1x + a_2y = b$$

є просто прямою на площині $\mathbb{R}^2$.

Приклад 2.0.5. *При* $n = 3$ *гіперплощина, яка визначається рівнянням*

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

є площиною в просторі $\mathbb{R}^3$.

Лема 2.0.1. *Перетин лінійних афінних многовидів є лінійним афінним многовидом.*

Доведіть цю лему самостійно.

Зауважимо, що об'єднання лінійних афінних многовидів, взагалі кажучи, не є лінійних афінним многовидом. Зокрема, пара точок або пара прямих , взагалі кажучи, не є лінійними афінними многовидами. Насправді, вони є прикладами нелінійних афінних многовидів.

Означення 2.0.4. *Нехай*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots k_n} a^{(i)}_{k_1, k_2, \ldots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, i = 1, 2, \ldots, m-$$

сукупність поліномів від n змінних з коефіцієнтами з поля $\mathbb{F}$. Множина розв'язків системи рівнянь

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \end{array}\right.,$$

називається **алгебраїчною множиною.** *Алгебраїчна множина Z називається* **афінним многовидом**, *якщо вона є незвідною, тобто її не можна подати у вигляді об'єднання $Z = Z_1 \cup Z_2$ алгебраїчних множин $Z_i \neq \varnothing, Z,\ i = i, 2$. Отже, алгебраїчна множина є об'єднанням афінних многовидів.*

Приклад 2.0.6. *Лінійні афінні многовиди є очевидно афінними многовидами.*

Приклад 2.0.7. *Рівняння $x^2 - y^2 = 0$ визначає пару прямих на площині і вона є прикладом алгебраїчної множини, яка є об'єднанням двох афінних многовидів.*

Вправа. Нехай $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{F}-$ фіксовані. Описати алгебраїчну множину, що визначається системою рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{lcl} (x-a_1)(y-b_2) & = & 0 \\ (x-a_2)(y-b_1) & = & 0 \end{array}\right.$$

Вправа. Намалювати алгебраїчну множину точок, що визначається системою рівнянь

$$\left\{\begin{array}{lcl} xy & = & 0 \\ yz & = & 0 \end{array}\right.$$

Приклад 2.0.8. *Рівняння $x^2+y^2 = 1$ є рівнянням кола на декартовій площині, тобто коло є прикладом нелінійного афінного многовида. Еліпс, гіпербола та парабола визначаються рівняннями*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y^2 = 2px,$$

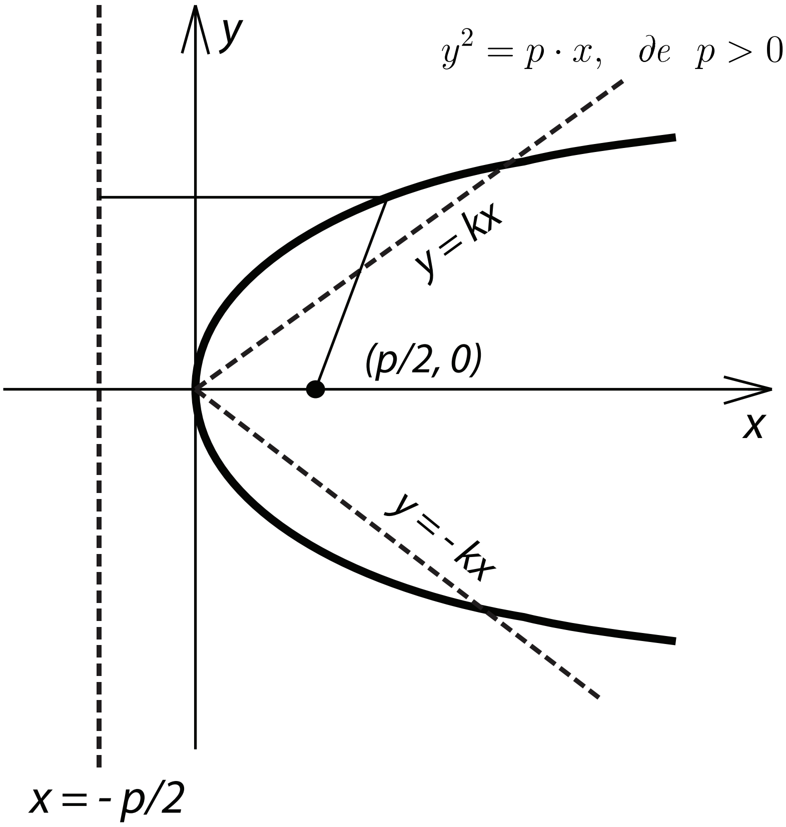
є прикладами нелінійних алгебраїчних множин ($a, b, p > 0$ - параметри), які називають кривими другого порядку.

Вправа 2.0.1. *Довести, що об'єднання і перетин алгебраїчних множин є алгебраїчною множиною.*

2.1 Геометричні властивості кривих другого порядку

Означення 2.1.1. *Афінний многовид називається* **параболою***, якщо існує декартова система координат на площині в якій він визначається рівнянням:*

$$y^2 = p \cdot x, \quad \text{де} \;\; p > 0 \;\; - \text{параметр} \tag{2.1.3}$$



Для відношення координат точок параболи маємо

$$\frac{|y|}{x} = \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}} \to 0, \quad \text{при} \;\; x \to +\infty.$$

Геометрично це означає, що для будь-якого $k > 0$, існує точка $x_0 = x_0(k)$ на осі абсцис така, що всі точки параболи з абсцисою більшою за x_0 лежать всередині кута, що утворюють прямі $y = \pm kx$.

Означення 2.1.2. *Число p, називається* **фокальним радіусом** *;*

число $\frac{p}{2}$*, називається* **фокусною відстанню***;*

точка $(\frac{p}{2}, 0)$*, називається* **фокусом**.

пряма $x = -\frac{p}{2}$*, називається* **директрисою** .

Теорема 2.1.1. *Геометричне означення параболи.*

Парабола є геометричним місцем точок рівновіддалених від деякої точки (фокуса) і прямої (директриси).

Доведення. Умова рівновіддаленості має вигляд

$$\left| x + \frac{p}{2} \right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2} \right)^2 + y^2}.$$

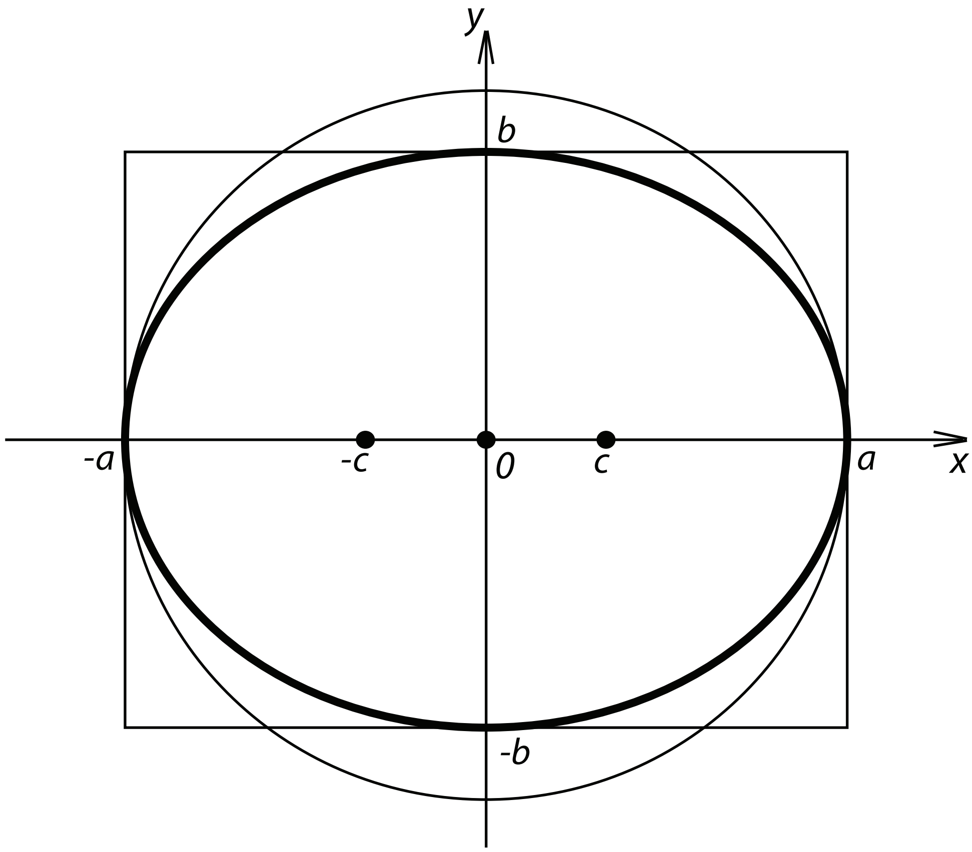
Легко переконатися, що всі точки параболи $M = M(y^2/2p, y)$ і тільки вони задовольняють цій умові. $\square$

Означення 2.1.3. *Афінний многовид називається* **еліпсом***, якщо існує декартова система координат на площині в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0. \tag{2.1.4}$$

Зауважимо, що при $a = b$ маємо рівняння кола радіуса a :

$$x^2 + y^2 = a^2 \tag{2.1.5}$$



Означення 2.1.4. *Точка $O(0,0)$ називається центром;*

точки $(\pm a, 0)$ та $(0, \pm b)$, називають вершинами еліпса;

відрізки $[0, a]$, $[0, b]$ назвемо більшою та меншою піввісями;

точки $(\pm c, 0)$ називаються фокусами;

число $p = \frac{b^2}{a}$, називають фокальным параметром ;

число $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$ називають відстанню між фокусами;

число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ називають **ексцентриситетом***, легко бачити, що для еліпса $0 \leq e < 1$;*

прямі $x = \pm \frac{a}{e}$, $e \neq 0$, називаються **директрисами***.*

Для точки еліпса $M(x,y)$ маємо два фокальних радіуса r_1, r_2 — відстані до лівого та правого фокусів. Для лівого радіуса маємо:

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) =$$
$$= (1 - \frac{b^2}{a^2})x^2 + 2xc + c^2 + b^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + 2xc + a^2 =$$
$$= e^2x^2 + 2xea + a^2 = (ex+a)^2.$$

Враховуючи, що $|ex| < a$, звідси отримуємо:

$$r_1 = a + ex.$$

Самостійно отримайте формулу для правого фокального радіуса:

$$r_2 = a - ex. \tag{2.1.6}$$

Додаванням цих формул отримуємо:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Припустимо тепер, що $M(x,y)$ — довільна точка площини, сума відстаней якої до фокусів дорівнює $2a$, тобто має місце

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Самостійно виведіть з цього, що координати (x,y) задовольняють рівнянню (2.1.4), а отже точка M належить еліпсу. Таким чином ми прийшли до геометричного означення еліпса:

Теорема 2.1.2. *Еліпс це геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох даних точок (фокусів) є постійне число, що дорівнює більшій вісі еліпса.*

Для відстаней точки еліпса $M(x,y)$ до лівої та правої директрис $x = \pm\frac{a}{e}$ маємо формули:

$$\left|x + \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex+a|}{e} = \frac{r_1}{e}.$$
$$\left|x - \frac{a}{e}\right| = \frac{|ex-a|}{e} = \frac{r_2}{e}.$$

Навпаки, якщо

$$\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2} = e\left|x \pm \frac{a}{e}\right|,$$

то

$$(x \pm c)^2 + y^2 = (ex \pm a)^2,$$

звідки,

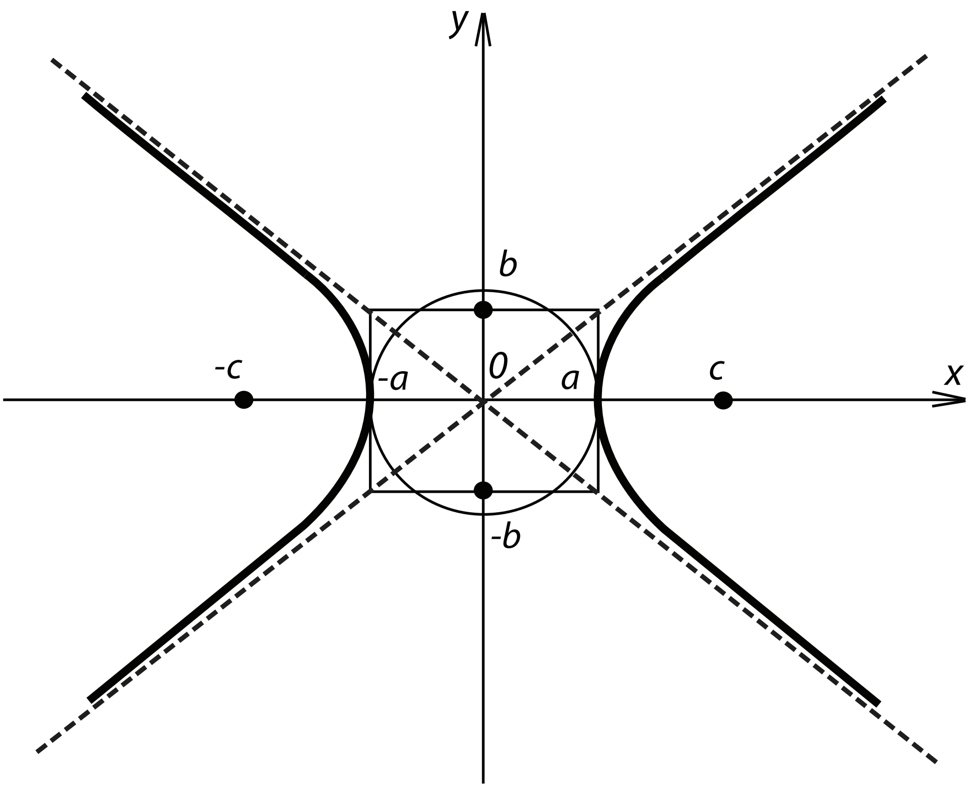
$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Останнє рівняння очевидно рівносильне рівнянню, (2.1.4), а отже (x, y) є координатами точки, що належить відповідному еліпсу. Тим самим ми отримали ще одне геометричне означення еліпса.

Теорема 2.1.3. *Еліпс є геометричне місце точок, відношення відстаней яких до даної точки (лівого або правого фокуса) і до даної прямої (лівої або правої директриси) є стала, рівна ексцентриситету.*

Означення 2.1.5. *Афінний многовид називається* **гіперболою***, якщо існує декартова система координат на площині в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \tag{2.1.7}$$



Гіпербола у якої $a = b$ називається рівнобічною. Рівняння такої гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ заміною системи координат (поворот на кут 45^0) :
$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), v = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ набуде вигляд

$$u \cdot v = 2a^2$$

Для гіперболи (2.2.8) введемо аналогічні терміни

Означення 2.1.6. *Точка* $O(0, 0)$ *назвемо центром, а точки* $(\pm a, 0)$ *вершинами гіперболи;*

відрізки $[0, a]$, $[0, b]$ *назвемо дійсною та уявною піввісями;*

число $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ *називають відстанню між фокусами;*

точки $(\pm c, 0)$ *називається фокусами;*

число $p = \frac{b^2}{a}$*, називають фокальным параметром ;*

число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$*, називають* **ексцентриситетом***, легко бачити, що для гіперболи* $e > 1$*;*

прямі $x = \pm\frac{a}{e}$, $e \neq 0$*, називаються* **директрисами***.*

число $p = \frac{b^2}{a}$*, називається фокальным параметром*

Поняття лівого та правого фокального радіусів точки $M(x, y)$ гіперболи вводяться як і для еліпса, і маємо ідентичні формули:

$$r_1^2 = (ex + a)^2, r_2^2 = (ex - a)^2$$

$$|ex| > |x| \geq a$$

Враховуючи останні нерівності, вилучаємо корені з квадратів лівих та правих частин і отримуємо:

$$r_1 = \begin{cases} a + ex & \text{при} \quad x > 0 \\ -a - ex & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$r_2 = \begin{cases} -a + ex & \text{при} \quad x > 0 \\ a - ex & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

Звідки,

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a & \text{при} \quad x > 0 \\ -2a & \text{при} \quad x < 0 \end{cases},$$

отже, для всіх x маємо

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Навпаки, самостійно переконайтесь, що якщо точка площини $M(x, y)$, така, що різниця відстаней до фокусів по модулю дорівнює $2a$, тобто має місце рівність

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a,$$

то координати (x, y) задовольняють рівнянню (2.2.8), а отже ця точка лежить на гіперболі. Цим доведено наступну теорему.

Теорема 2.1.4. *Гіпербола це геометричне місце точок, різниця відстаней яких до двох даних точок (фокусів) за модулем є стала, що дорівнює довжині дійсної вісі* $2a$*.*

Як і для еліпса існує інше геометричне означення гіперболи.

Теорема 2.1.5. *Гіпербола є геометричне місце точок, відношення відстаней яких до даної точки (лівого або правого фокуса) і до даної прямої (лівої або правої директриси) є стала, рівна ексцентриситету.*

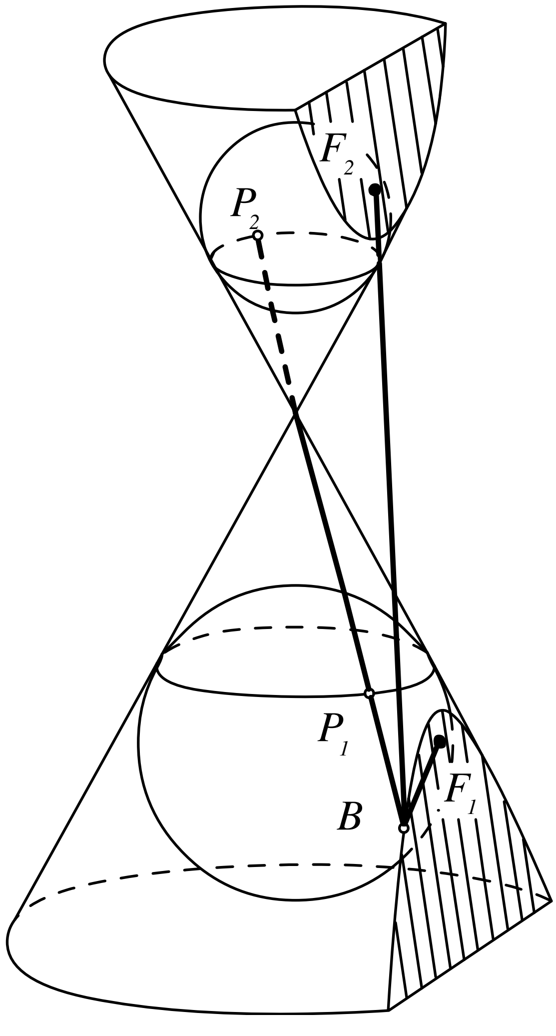
Доведення. Слід скористатися вищенаведеними формулами для r_1, r_2, та дослівно повторити доведення проведене для еліпса. $\square$

2.2 Поверхні другого порядку

Означення 2.2.1. *Афінний многовид називається* **конусом***, якщо існує декартова система координат тривимірного простору, в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geq b > 0, c > 0 \tag{2.2.8}$$

Чудовою властивістю конуса є те, що і еліпс, і гіпербола, і парабола можуть бути отримані як перерізи конуса площиною. Це можна легко отримати аналітично, але ми наведемо геометричні міркування.



Розглянемо випадок, коли площина перерізає обидва півконуса (на малюнку вона заштрихована). Впишемо дві кулі, які дотикаються до півконусів та площини. Точки дотику куль до конуса дають нам два кола. Нехай B — довільна точка перерізу. З'єднаємо її з вершиною конуса, і позначимо точки перетину з вищезгаданими колами P_1, P_2. Як відомо, відрізки дотичних до кулі проведені з однієї точки мають однакову довжину, отже маємо рівності довжин відрізків

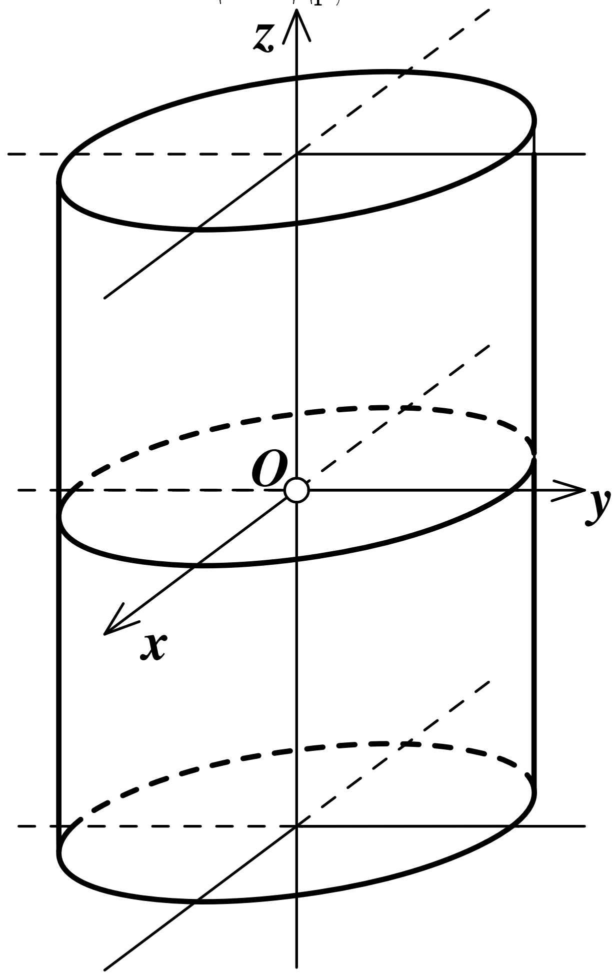
$$BF_1 = BP_1, \qquad BF_2 = BP_2,$$

звідки
$$|BF_2 - BF_1| = |BP_2 - BP_1| = |P_1P_2|.$$
Зауважимо, що довжина відрізка P_1P_2 залежить лише від конуса та площини і не залежить від обраної точки перерізу B. За теоремою 2.1.4, маємо що наш переріз є гіперболою.

Вправа 2.2.1. *Розглянути випадок, коли площина перерізає лише один півконус і, провівши аналогічні міркування, довести, що перерізом буде еліпс, якщо площина перерізу не є паралельною до твірної конуса і параболою в протилежному випадку.*

Означення 2.2.2. *Нехай маємо площину в тривимірному просторі, можна вважати, що $\mathbb{F}^2 \subset \mathbb{F}^3$, і $\mathbb{F}^2 \supset Z$ — алгебраїчна множина, що є множиною нулів деякої системи поліноміальних рівнянь. Множина нулів цієї ж системи в $\mathbb{F}^3$ називається* **циліндричною поверхнею** *над Z.*

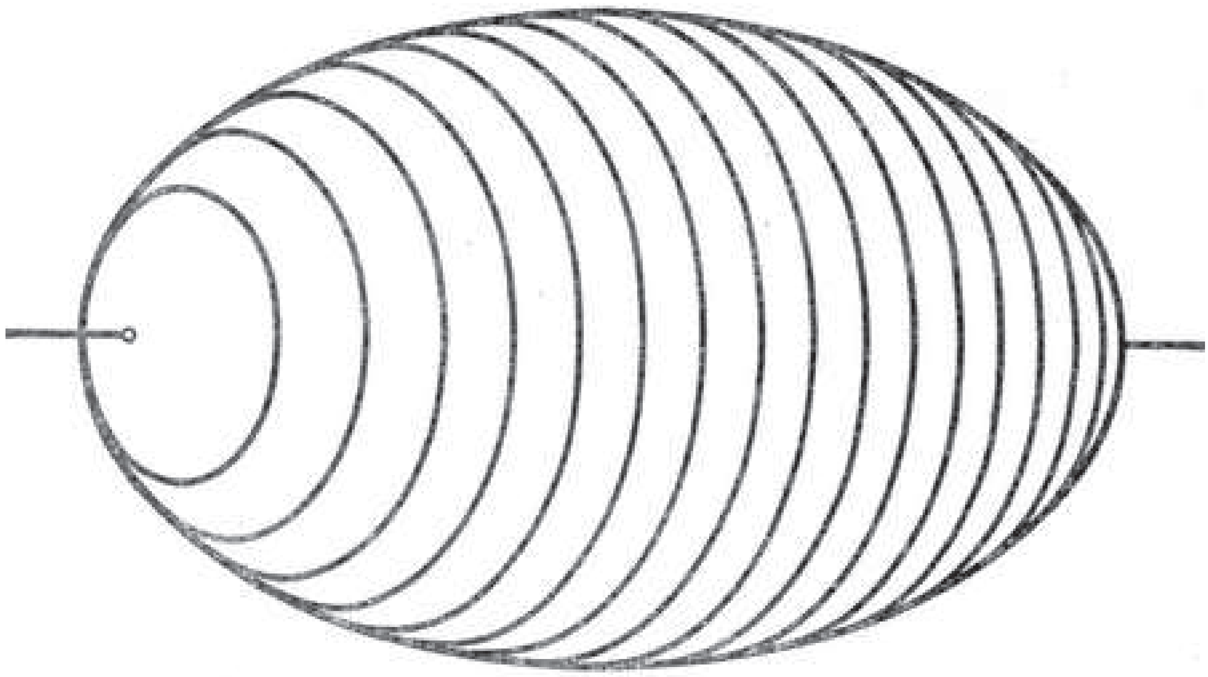
На цьому шляху отримуємо еліптичний циліндр,



а також параболічний та гіперболічний циліндри. Два останніх пропонуємо намалювати самостійно.

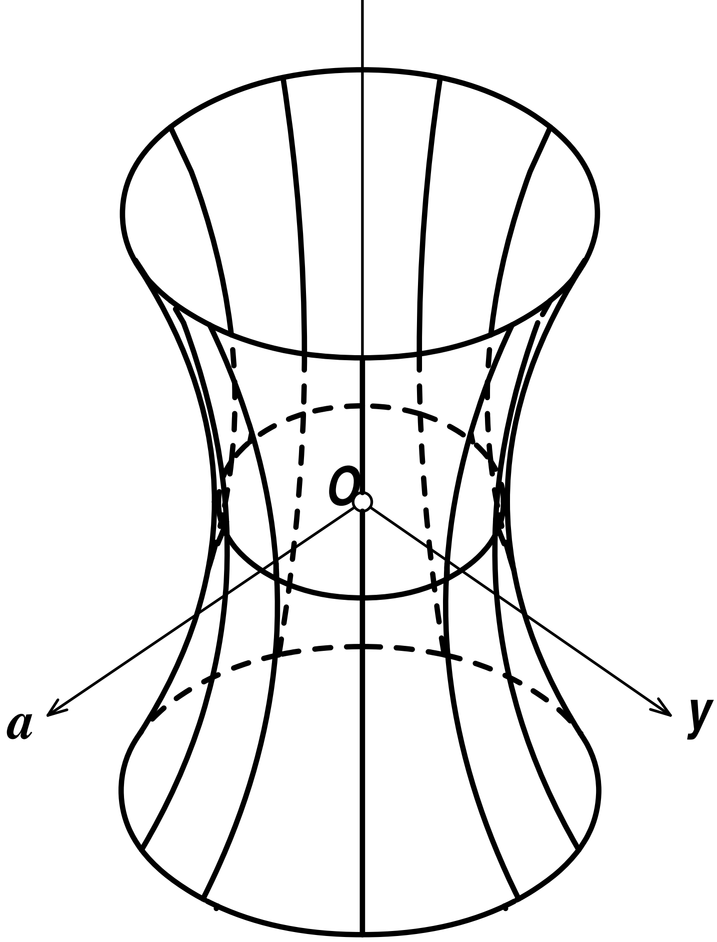
Означення 2.2.3. *Афінний многовид називається* **еліпсоїдом**, *якщо існує* *декартова система координат в тривимірному просторі в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0. \tag{2.2.9}$$



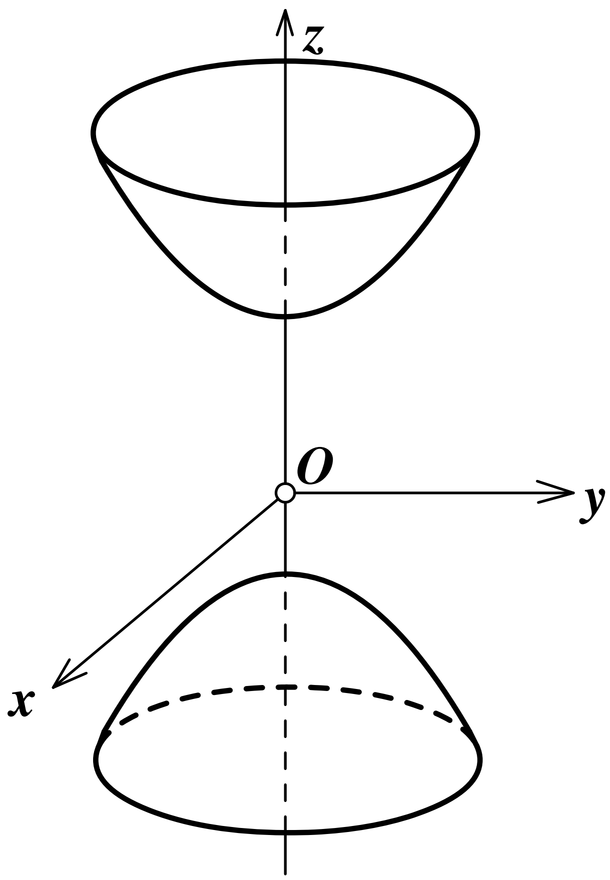
Означення 2.2.4. *Афінний многовид називається* **однопорожнинним гіперболоїдом**, *якщо існує декартова система координат в тривимірному просторі в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0. \tag{2.2.10}$$



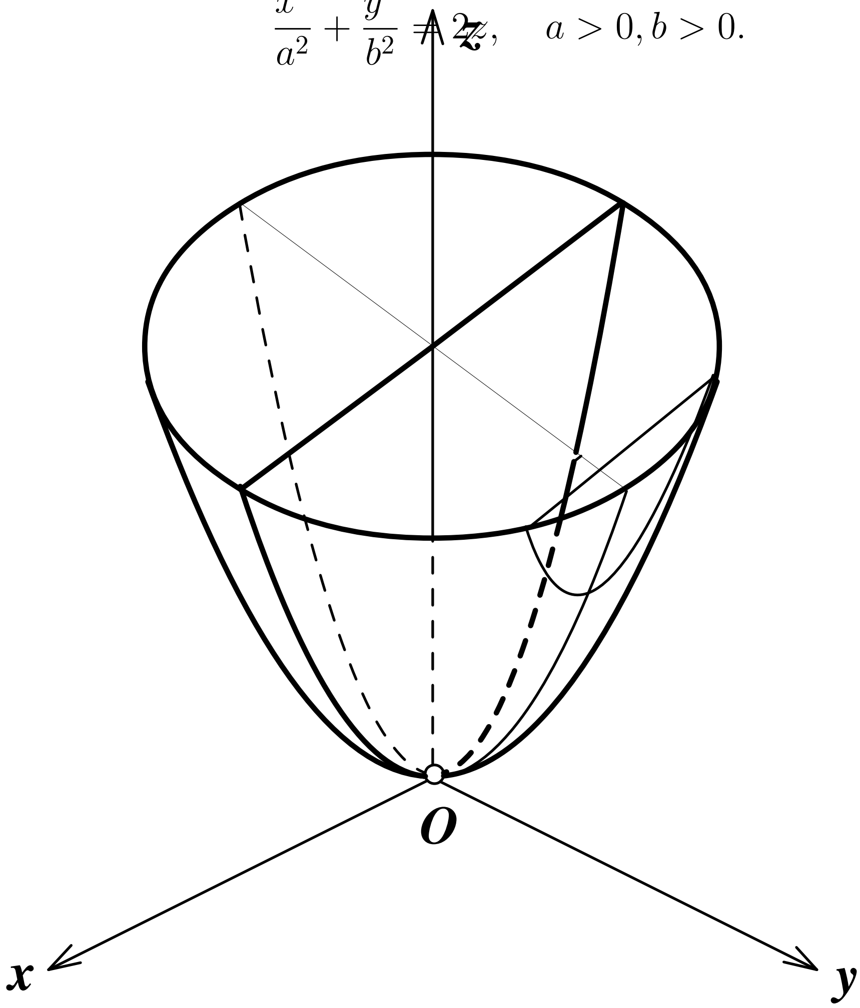
і **двопорожнинним гіперболоїдом***, якщо існує декартова система координат в тривимірному просторі в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0. \tag{2.2.11}$$



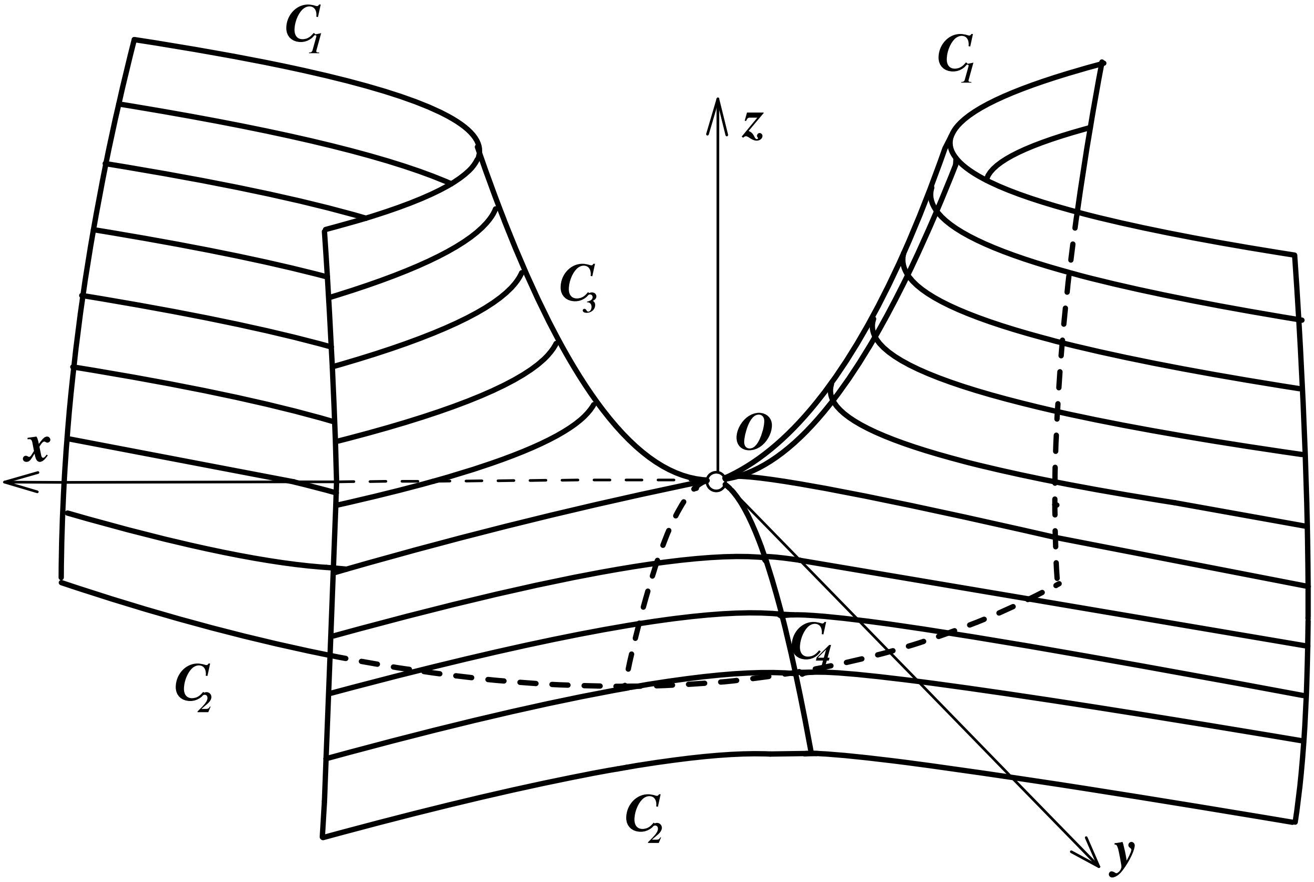
Означення 2.2.5. *Афінний многовид називається* **еліптичним параболоїдом**, *якщо існує декартова система координат в тривимірному просторі в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, b > 0. \tag{2.2.12}$$



Означення 2.2.6. *Афінний многовид називається* **гіперболічним параболоїдом**, *якщо існує декартова система координат в тривимірному просторі в якій він визначається рівнянням:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, b > 0. \tag{2.2.13}$$



2.3 Параметризація афінних многовидів.

Означення 2.3.1. *Параметризацією афінного многовиду V називається сюрєкція $p : \mathbb{F}^m \to V$.*

Якщо $V \subset \mathbb{F}^{\ltimes}$, то $p = (p_1, p_1, \ldots, p_n)$, $\;p_j : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$, при цьому рівняння

$$\{x_i = p_i(t_1, t_2, \ldots, t_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3.14}$$

називаються параметричними рівняннями многовиду.

Приклад 2.3.1. *Пряму на площині, що задана рівнянням $y = kx + b$, можна параметризувати таким чином: $t \to (t, kt + b)$, а для прямої, що проходить через точку з координатами (x_0, y_0) і паралельну вектору (a_1, a_2) параметризація має вигляд $t \to (x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t)$. Для прямої в тривимірному просторі, що проходить через точку (x_0, y_0, z_0) і паралельну вектору (a_1, a_2, a_3) будемо мати $t \to (x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t, z_0 + a_3 t)$.*

Приклад 2.3.2. *Зі школи відомо, що коло $x^2 + y^2 = 1$ можна параметризувати за допомогою тригонометричних функцій: $\mathbb{R} \ni t \to (\cos t, \sin t)$.*

Приклад 2.3.3. *Площина Π в тривимірному просторі однозначно визначається парою паралельних їй векторів $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ та однією з її точок $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in Pi$. Дійсно, точка $M = (x, y, z)$ належить Π тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{MM_0}$ можна подіти як лінійну комбінацію векторів u, v : $\overrightarrow{MM_0} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$. Отже, маємо двовимірну параметризацію*

$$p : (\lambda, \mu) \to (x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1, y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3)$$

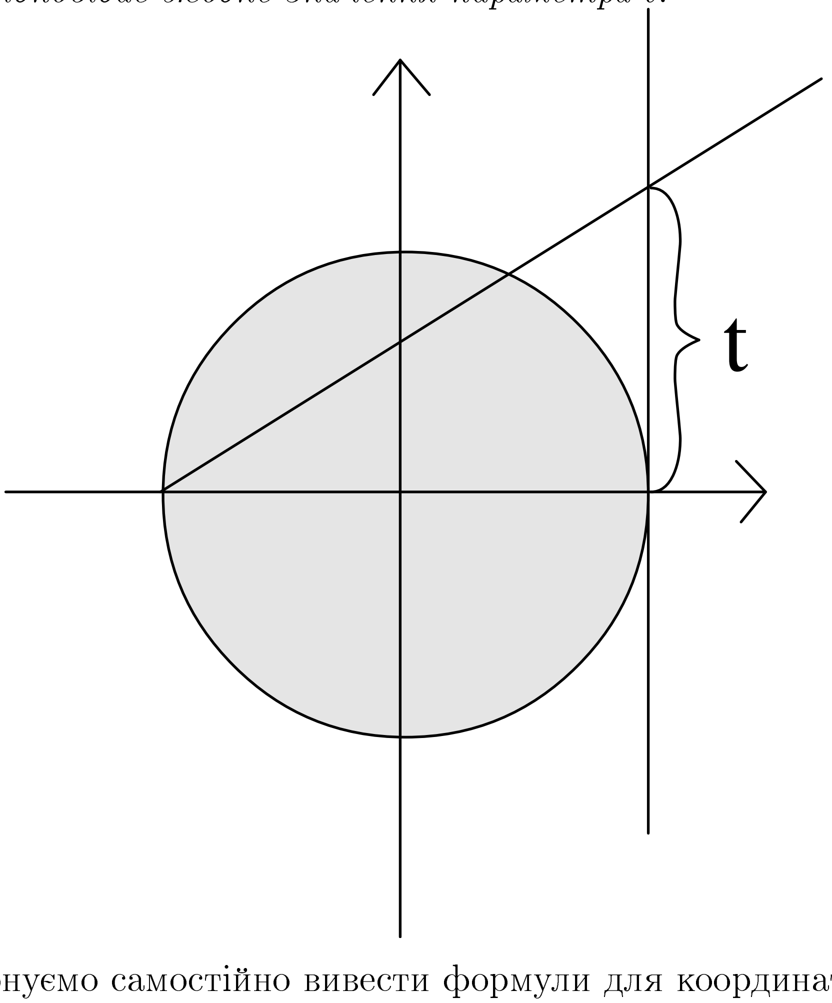
Приклад 2.3.4. *Відображення*

$$(\phi, \theta) \to (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$$

є параметризацією сфери.

Параметризація абсолютно необхідна для задач комп'ютерної графіки, адже вона дає координати точок афінного многовиду (поверхні) в явному вигляді. Надаючи достатньо велику кількість значень параметрам, можна засвітити на екрані комп'ютера так багато пікселей, що вони зіллються в суцільне зображення поверхні. При цьому часом використовують неповну параметризацію, коли деяким точкам многовиду не відповідає жодного набору значень параметрів. Зрозуміло, що відсутність окремих пікселей не впливає на вигляд зображення на екрані. Прикладом такої параметризації є стереографічна проекція, яка є раціональною параметризацією кола з виколотою точкою.

Приклад 2.3.5. *Згідно малюнка, кожному значенню параметра $t \in \mathbb{R}$ однозначно відповідає точка на колі. Очевидно, що існує точно одна точка кола, якій не відповідає жодне значення параметра t.*



Пропонуємо самостійно вивести формули для координат точок кола $x = x(t), y = y(t)$ при стереографічній проекції.

2.4 Параметризація лінійних афінних многовидів

Повернемося до лінійних афінних многовидів Для систем лінійних рівнянь виду (2.0.1) ми часто будемо вживати більш короткий запис:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j & = & b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j & = & b_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j & = & b_3 \\ \quad\dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j & = & b_m, \end{cases} \tag{2.4.15}$$

або ще коротше

$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m. \right. \tag{2.4.16}$$

Зараз нашею задачею буде побудова алгоритмів параметризації многовидів, що задаються даною системою лінійних рівнянь. При цьому, вектор

$$(p_1(t_1, t_2, \dots, t_m), p_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, p_n(t_1, t_2, \dots, t_m)),$$

з означення 2.3.1, називається **загальним роз'язком** системи лінійних рівнянь. Значення цього вектора при конкретних значеннях параметрів є координатами точки лінійного многовиду, його часом називають **частковим роз'язком** системи лінійних рівнянь.

Означення 2.4.1. *Дві системи лінійних рівнянь від n змінних називаються еквівалентними, якщо вони визначають один і той же многовид, тобто множини їх розв'язків рівні.*

Покажіть, що введене бінарне відношення на множині систем лінійних рівнянь від n невідомих над полем $\mathbb{F}$ дійсно є відношенням еквівалентності.

Приклад 2.4.1. *Якщо в системі рівнянь* (2.0.1) *зробити довільну перестановку рівнянь, то ми очевидно отримаємо систему еквівалентну початковій.*

Приклад 2.4.2. *Якщо в системі рівнянь* (2.0.1) *помножити обидві частини деякого i-го рівняння на довільне $\lambda \in \mathbb{F}^*$, а решту рівнянь залишити незмінними, то отримана система буде також еквівалентна початковій.*

Приклад 2.4.3. *Якщо в системі рівнянь* (2.0.1) *до j-го рівняння додати i-те помножене на $\lambda \in \mathbb{F}$, а решту рівнянь (включаючи i-те) залишити незмінними, то отримана система буде еквівалентна початковій.*

Доведіть останнє твердження самостійно.

Приклад 2.4.4. *Якщо в системі рівнянь* (2.0.1) *зробити заміну невідомих і покласти:* $x_i = y_j, \quad x_j = y_i$, *а для* $k \neq i, j$ *покласти* $x_k = y_k$, *то ми отримаємо систему рівнянь, яка взагалі кажучи не є еквівалентною початковій.*

Наведіть конкретний приклад такої системи.

Означення 2.4.2. *Таблиця елементів поля розміру* $m \times n$ *виду*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.4.17}$$

називається **матрицею** *системи лінійних рівнянь, а таблиця виду*

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{2.4.18}$$

називається **розширеною матрицею** *системи лінійних рівнянь.*

Очевидно, що розширена матриця (2.4.18) однозначно визначає систему (2.0.1) і навпаки. При цьому перетворенням систем, наведеним в прикладах 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 будуть відповідати такі перетворення матриць — перестановка рядків, множення рядка на число, додавання до j-го рядка i-го помноженого на $\lambda \in \mathbb{F}$, перестановка стовпчиків матриці.

Елементарні перетворення матриць.

1. $Mr(i, \lambda), \quad Mc(i, \lambda)$ — множення рядка, стовпчика на число $\lambda \neq 0$;

2. $Swr(i, j), Swc(i, j)$ — перестановка відповідних рядків, стовпчиків;

3. $Adr(i, \lambda, j), Adc(i, \lambda, j)$ — додавання i-го рядка, стовпчика, помноженого на $\lambda \in \mathbb{F}$ до j-го рядка, стовпчика; всі рядки, стовпчики відмінні від j-го залишаються незмінними.

Елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи лінійних рівнянь приводять до матриці системи рівнянь, яка еквівалентна даній. При виконанні елементарних перетворень над стовпчиками основної матриці, слід зробити відповідну заміну змінних:

1. $Mc(i, \lambda) - \quad x_i = \lambda y_i, x_k = y_k, \quad k \neq i;$

2. $Swc(i,j)$ – $\quad x_i = y_j, x_j = y_i, x_k = y_k, \quad k \neq i, j$;

3. $Adc(i,\lambda,j) \quad - x_i = y_i + \lambda y_j, \quad x_k = y_k, k \neq i$.

Алгоритми побудови загального розв'язку системи лінійних рівнянь. Метод Гауса.

1. (1-й крок). Використовуючи процедуру $Swr(1,j)$ приходимо до матриці виду (2.4.18), у якої в верхньому лівому куті (елемент a_{11}) є ненульовим;

2. для кожного $j = 2, 3, \ldots, m$ виконуємо процедуру $Adr(1, -\frac{a_{i,1}}{a_{11}}, j)$; в результаті чого приходимо до матриці у якої всі елементи першого стовпчика крім першого є нульовими;

3. (2-й крок) якщо в отриманій матриці для всіх $i, j : 1 < i \leq n,\ 1 \leq i \leq n \quad a_{i,j} = 0$, то зупиняємося, в протилежному випадку, виконуємо процедуру $Swr(2,j)$ або $Swc(2,j)$ для деякого $j > 2$, таким чином, щоб отримати матрицю у якої $a_{22} \neq 0$; якщо при цьому переставлялися стовпчики, то робимо відповідну заміну змінних;

4. для кожного $j = 3,\ 4,\ \ldots,\ m$, а також $j = 1$ виконуємо процедуру $Adr(2, -\frac{a_{j,2}}{a_{22}}, j)$, в результаті чого приходимо до матриці у якої всі елементи другого стовпчика крім другого є нульовими;

5. на s-му кроці алгоритму перевіряємо, чи є в рядках з номерами $\geq s$ отриманої матриці елементи $a_{ij}, \quad i \geq s$, відмінні від нуля; якщо таких немає, то зупиняємося, якщо є, то виконуємо процедуру $Swr(s,j)$ або $Swc(s,j)$ для деякого $j > s$, таким чином, щоб отримати матрицю у якої $a_{ss} \neq 0$; якщо при цьому переставлялися стовпчики, то робимо відповідну заміну змінних;

6. для кожного $j = s+1, s+2, \ldots, m$, а також $j = 1, 2, \ldots, s-1$ виконуємо процедуру $Adr(s, -\frac{a_{j,s}}{a_{ss}}, j)$; в результаті чого приходимо до матриці у якої всі елементи s-стовпчика крім s-го є нульовими;

7. зупиняємося якщо в отриманій основній матриці для всіх $i > s \quad a_{i,j} = 0$ або якщо рядки матриці вичерпано; якщо отримано нульовий рядок основної матриці, а відповідний елемент останнього стовпчика не є нульовим, то отримана система несумісна.

Застосувавши вказаний алгоритм ми прийдемо до матриці виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} \underline{a_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1s+1} & a_{1s+2} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \underline{a_{22}} & 0 & \dots & 0 & a_{2s+1} & a_{2s+2} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \underline{a_{33}} & \dots & 0 & a_{3s+1} & a_{3s+2} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \underline{a_{s,s}} & a_{ss+1} & a_{ss+2} & \dots & a_{sn} & b_s \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \tag{2.4.19}$$

де підкреслені елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ss}$ відмінні від нуля. Розв'язуємо рівняння відносно нових змінних з номерами $1, 2, \dots, s$, і переходимо до початкових змінних $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_s}$, які назвемо **головними**, решту змінних назвемо параметрами і позначимо $t_1, t_2, \dots, t_{n-s}$.

Загальний розв'язок системи отримуємо у вигляді:

$$\left(x^*_{i_1}(t_1, t_2, \dots, t_{n-s}), x^*_{i_2}(t_1, t_2, \dots, t_{n-s}), \dots, x^*_{i_s}(t_1, t_2, \dots, t_{n-s}), t_1, t_2, \dots, t_{n-s}\right).$$

Метод Жордана-Гауса.

В цьому методі ми відмовляємося від перестановок стовпчиків, тоді вказаними в попередньому алгоритмі процедурами можна привести матрицю до східчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc|c} \underline{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1\ n_1} & 0 & a_{1\ n_1+2} & \dots & a_{1n_2} & \dots & 0 & \dots & a_{1\ n} & b_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \underline{a_{2\ n_1+1}} & a_{2\ n_1+2} & \dots & a_{2\ n_2} & \dots & 0 & \dots & a_{2\ n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \underline{a_{k\ n_k+1}} & \dots & a_{k\ n} & b_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{2.4.20}$$

При цьому числа $n_1, n_2-n_1, \dots, n-n_k$ — довжини сходинок можуть приймати значення від 1 до n. Якщо довжини всіх сходинок дорівнюють 1, то отримуємо основну матрицю діагонального виду, якщо ж такими є всі сходинки крім останньої, то отримуємо матрицю виду (2.4.19). Протилежна ситуація, коли маємо одну сходинку довжини n, це означає, що лінійний афінний многовид розв'язків системи рівнянь є гіперплощина. Приймаємо змінні $x_1, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_k+1}$ за головні, а решту за параметри і по матриці (2.4.20) виписуємо загальний розв'язок системи:

$$\big(x_1^*(t_1, t_2, \dots t_{n-k}), t_1, \dots, t_{n_1-1}, x_{n_1+1}^*(t_1, t_2, \dots t_{n-k}), t_{n_1}, \dots,$$
$$\dots, t_{n_k-k+1}, x_k^*(t_1, t_2, \dots t_{n-k}), t_{n_k-k+2}, \dots, t_{n-k}\big) \quad (2.4.21)$$

Модифікований метод Жордана-Гауса (freestyle)

В цьому методі ми відмовляємось не тільки від перестановки стовпчиків матриці (2.4.18), а і від перестановки її рядків.

1. Обираємо зручний матричний елемент a_{ij}, в тому сенсі, що всі елементи його стовпчика легко діляться на цей елемент, зокрема дуже зручно коли $a_{i,j} = \pm 1$; виконуються процедури $Adr(i, \lambda_j, j), j = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ де λ_j підбираються таким чином щоб в отриманій матриці усі елементи $j-$ го стовпчика окрім $i-$ го були нульовими, при цьому змінна x_j приймається за головну, а $i-$ й рядок відмічається як оброблений.

2. Обирається зручний матричний елемент із рядків що не оброблялися і знову виконується процедура Adr, при цьому нулі отримані на попередніх етапах не будуть порушені, бо оброблені раніше рядки вже додаватись до інших не будуть.

3. Алгоритм завершує роботу коли отримана основна матриця у якої кожен ненульовий рядок був раніше оброблений, тобто в ньому виділена головна змінна, або коли в процесі виконання отримано нульовий рядок основної матриці, якому відповідає ненульовий вільний член (система несумісна).

Отримана матриця має так званий **мономіальний** вид — в кожному ненульовому рядку є такий елемент (можливо не один), шо в його стовпчику всі елементи відмінні від нього є нульовими.

Після цього залишається розв'язати відповідні рівняння відносно головних змінних, а решту прийняти за параметри і виписати загальний розв'язок системи лінійних рівнянь.

Наведемо приклад мономіальної матриці, яка може бути отримана в результаті роботи цього алгоритму.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці у першому рядку таким елементом є другий, відповідна головна змінна x_2, у другому рядку перший, відповідна головна змінна x_1, а в третьому рядку таким є четвертий, відповідна головна змінна x_4.

2.5 Задачі

2.5.1 Криві другого порядку

1. Довести такі властивості кривих другого порядку:

   a)промінь світла, який виходить з фокуса F_1 еліпса, після дзеркального відбиття від лінії еліпса проходить через фокус F_2 еліпса;

   b)промінь світла, який виходить з фокуса F_1 гіперболи, після дзеркального відбиття від лінії гіперболи проходить через фокус F_2 гіперболи;

   c)промінь світла, який виходить з фокуса параболи, після дзеркального відбиття від лінії параболи поширюється паралельно осі параболи.

2. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо

   a) його мала вісь і відстань між фокусами дорівнюють 10 і 6 відповідно;
   b) його мала вісь і ексцентриситет дорівнюють 10 і $\frac{12}{13}$ відповідно;
   c) відстані між його директрисами та відстань між фокусами дорівнюють 5 і 4 відповідно;
   d) його велика вісь і відстань між директрисами дорівнюють 8 і 16 відповідно;
   e) відстань між його директрисами та ексцентриситет дорівнюють 32 і $\frac{1}{2}$ відповідно.

3. Ексцентриситет еліпса дорівнює $\frac{1}{2}$, його центр збігається з початком координат, а одна з директрис задана рівнянням $x = 16$. Обчислити відстань від точки M еліпса з абсцисою -4 до одностороннього з даною директрисою фокуса.

4. Ексцентриситет еліпса дорівнює $\frac{1}{3}$ його центр збігається з початком координат, а один з фокусів — з точкою $(-2, 0)$. Обчислити відстань від точки M еліпса з абсцисою 2 до односторонньої з даним фокусом директриси.

5. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює 14.

6. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює $\frac{5}{2}$.

7. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дано

a) точку $(-2\sqrt{5}, 2)$ еліпса і його малу піввісь 3;

b) точку $(-2, 2)$ еліпса і його велику піввісь 4;

c) точки $(4, -\sqrt{3})$ і $(2\sqrt{2}, 3)$ еліпса;

d) точку $(2, 3)$ еліпса і його ексцентриситет $\frac{1}{3}$;

e) точку $(-\sqrt{5}, 2)$ еліпса і відстань між його директрисами 10.

8. Скласти рівняння дотичних до еліпса
$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$$
проведених з точки $A(12, -3)$.

9. Визначити, яке з наступних рівнянь є рівнянням еліпса, яке гіперболи. З рівнянь, що визначають еліпс або гіперболу визначити координати центра, півосі, ексцентриситет та рівняння директрис відповідної кривої:

   a) $2x^2 + 9y^2 - 4x + 18y + 19 = 0$;

   b) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

   c) $2x^2 - 9y^2 - 4x + 18y + 19 = 0$;

   d) $-x^2 - 9y^2 - 4x + 18y - 9 = 0$;

   e) $7x^2 + 4y^2 + 28x - 16y + 10 = 0$.

10. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо

   a) її уявна вісь і відстань між фокусами дорівнюють 10 і 8 відповідно;

   b) її уявна вісь і ексцентриситет дорівнюють 6 і $\frac{3}{2}$ відповідно;

   c) відстані між її директрисами та відстань між фокусами дорівнюють 4 і 6 відповідно;

   d) її ексцентриситет і відстань між директрисами дорівнюють і $\frac{4}{3}$ 4 відповідно;

   e) асимптоти задані рівняннями $y = \pm\frac{3}{4}x$, і відстань між директрисами дорівнює $\frac{64}{5}$.

11. Ексцентриситет гіперболи дорівнює $\frac{3}{2}$, її центр збігається з початком координат, а одна з директрис задана рівнянням $x = -6$. Обчислити відстань від точки гіперболи з абсцисою 10 до одностороннього з даною директрисою фокуса.

12. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює $\frac{9}{2}$.

13. Визначити точки гіперболи $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, відстань від яких до лівого фокуса дорівнює 7.

14. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якого знаходяться на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дано

    a) точку $(6,-1)$ гіперболи і її ексцентриситет $\sqrt{2}$;

    b) точку $(-3,\frac{5}{2})$ гіперболи і її рівняння директрис $x=\pm\frac{4}{3}$;

    c) рівняння асимптот $y=\pm\frac{3}{4}x$ і рівняння директрис $x=\pm\frac{16}{5}$ гіперболи;

15. Скласти рівняння гіперболи, асимптотами якої є прямі

$$y=\pm 2x$$

    і яка проходить через точку $A(1,3)$.

16. Знайти фокус і рівняння директриси параболи $y^2=12x$.

17. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(-7,0)$ та рівняння директриси $x-7=0$.

18. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(7,2)$ та рівняння директриси $x-5=0$.

19. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(4,3)$ та рівняння директриси $y+1=0$.

20. Скласти рівняння параболи, якщо задано фокус $F(2,-1)$ та рівняння директриси $x-y-1=0$.

21. Через точку $A(2,1)$ провести таку хорду параболи $y^2=4x$, яка б ділилась в даній точці навпіл.

22. Записати рівняння параболи, еліпса та гіперболи в полярних координатах. Довести, що якщо за початок координат взяти фокус, то всі вони можуть бути задані одним і тим же рівнянням:

$$r=\frac{p}{1-e\cos\phi}.$$

23. Задача дослідити, які криві другого порядку можна отримати як перерізи наведених раніше поверхонь другого порядку.

24. Довести, що добуток відстаней від фокусів еліпса до будь-якої дотичної до нього дорівнює квадрату малої піввісі.

25. Фокус лінії другого порядку знаходиться в точці $F(3, 0)$, директрисою, яка відповідає цьому фокусу, є пряма $x = 12$. Визначити вигляд лінії та скласти її рівняння, знаючи при цьому, що вона проходить через точку $A(7, 3)$.

26. Знайти фокуси та директриси рівносторонньої гіперболи $xy = 8$.

27. Знайти точки еліпса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b,$$
в яких нормаль до еліпса найвіддальніша від його центра. Знайти цю найбільшу відстань.

28. Скласти рівняння родини всіх еліпсів, які мають одні й ті самі фокуси $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$.

29. Скласти рівняння дотичних до еліпса
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$
які проходять через точку $(10, 4)$.

30. При якій необхідній та достатній умові пряма
$$Ax + By + C = 0$$
1)дотична до еліпса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
2)перетинає еліпс, 3)не перетинає його?

31. Довести, що дотичні до еліпса відсікають на двох дотичних до нього, проведених в кінцях більшої осі, відрізки, добуток яких дорівнює квадрату малої піввісі еліпса.

32. Довести, що відрізок будь-якої дотичної до еліпса, замкнений між дотичними, проведеними в кінцях більшої осі, видно з будь-якого фокуса під прямим кутом.

33. Знайти геометричне місце точок, з яких еліпс
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
видно під прямим кутом.

34. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого $(-3, 0)$ та $(3, 0)$ та який дотикається до прямої $x + y - 5 = 0$.

35. Знайти геометричне місце проекцій якого-небудь фокусу еліпса на дотичні до нього.

36. За якої умови з точки (x_0, y_0) можна провести дотичні до еліпса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1?$$
Скласти рівняння лінії, яка розпадається на дотичні, проведені до даного еліпса з даної точки.

37. Знайти кут між дотичними, проведеними з точки (x_0, y_0) до еліпса
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

38. Довести, що сума квадратів обернених величин до двох взаємно перпендикулярних радіусів еліпса є стала.

39. Довести, що директриса гіперболи проходить через проекцію відповідного їй фокусу на будь-яку з асимптот. Знайти також відстань від будь-якого фокусу гіперболи до будь-якої з асимптот.

40. Довести, що добуток відстаней від будь-якої точки гіперболи до її асимптоти є сталим.

41. Скласти рівняння дотичних до гіперболи
$$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1,$$
які проходять через точку $M(1, 4)$.

42. За якої необхідної й достатньої умови пряма $Ax+By+C = 0$ 1)дотикається до гіперболи
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$
2)перетинає гіперболу, 3)не перетинає її?

43. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомо що рівняннями її асимптот є $y = \pm\frac{1}{2}x$ і рівняння $5x - 6y - 8 = 0$ є рівнянням однієї з дотичних.

44. 1)За яких умов з точки (x_0, y_0) можна провести до гіперболи дві різні дотичні? Скласти рівняння пари цих дотичних. 2)За яких умов з точки (x_0, y_0) можна провести до гіперболи тільки одну дотичну? Скласти її рівняння.

45. найти кути між між дотичними до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

проведеними з точки (x_0, y_0).

46. Довести, що відрізок дотичної до гіперболи в точці M_0, розташований між її асимптотами, точкою M_0 ділиться навпіл.

47. Знайти площу паралелограма, одна з вершин якого є точкою гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

а дві сторони паралелограма лежать на асимптотах.

48. Довести, що відрізок довільної дотичної до гіперболи, який розташований між двома даними дотичними до цієї гіперболи, видно з будь-якого фокусу під прямим кутом.

49. Довести, що точки перетину дотичної до гіперболи з її асимптотами лежать на одній окружності з фокусами.

50. За якої необхідної й достатньої умови пряма $Ax + By + C = 0$ 1)дотична до параболи $y^2 = 2px$; 2)перетинає параболу $y^2 = 2px$; 3)не перетинає параболу.

51. Знайти геометричне місце проекцій фокусу параболи на дотичні до неї.

52. Знайти геометричне місце точок, симетричних фокусу параболи відносно дотичних до неї.

53. Знайти геометричне місце точок, для кожної з яких дотичні, проведеної з неї до параболи, взаємно перпендикулярні.

54. Довести, що фокус параболи та точки дотику двох дотичних до параболи, проведених з будь-якої точки директриси, належать одній прямій.

55. Довести, що відрізок довільної дотичної до параболи, розташований між двома фіксованими дотичними до неї, проектуються на на директрису в відрізок однієї й тієї самої довжини.

56. Довести, що якщо точка рухається по одній з дотичних до параболи, то кут між прямою, яка з'єднує цю точку з фокусом, та другою дотичною до параболи, яка проходить через ту ж точку, зберігає сталу величину.

57. Нехай M — точка перетину дотичних до параболи в точках M_1 та M_2, а F — фокус параболи. Доведіть, що

$$1) MF^2 = M_1F \cdot M_2F; \quad 2) \frac{M_1F}{M_2F} = \left(\frac{M_1M}{M_2M}\right)^2.$$

58. Довести, що прямі, які з'єднують основи перпендикулярів, проведених з кожної точки однієї сторони трикутника на дві інші його сторони, дотичні до однієї й тієї ж параболи. Фокусом цієї параболи слугують основи відповідної висоти трикутника. Директрисою є пряма, яка об'єднує основи двох інших висот.

59. З точки $A(-10, 8)$ проведедено дотичні до еліпса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Знайти рівняння хорди, що сполучає точку дотику.

60. Еліпс проходить через точку $A(4, -1)$ і дотикається до прямої $x + 4y - 10 = 0$. Записати рівняння цього еліпса, якщо осі еліпса збігаються з осями координат.

61. Пряма $x - y - 5 = 0$ дотикається до еліпса, фокуси якого лежать у точках $F_1(-3, 0)$, $F_2(3, 0)$. Записати рівняння цього еліпса.

62. Точка $A(-3, -5)$ належить гіперболі, фокус якої $F(-2, -3)$, а рівняння відповідної цьому фокусу директриси має вигляд $x + 1 = 0$. Записати рівняння цієї гіперболи.

63. Показати, що кожне з даних рівнянь визначає гіперболу, знайти для кожної центр, півосі і рівняння асимптот:

$$1) xy = 18; \quad 2) 2xy - 9 = 0; \quad 3) 2xy + 25 = 0.$$

64. Чи існують дотичні до гіперболи $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{8} = 1$, які паралельні бісектрисам координатних кутів?

65. Довести, що коли еліпс і гіпербола мають спільні фокуси, то дотичні до них у точках їх перетину взаємно перпендикулярні.

66. Дослідити систему лінійних рівнянь над полем дійсних чисел.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

67. Дослідити сумісність, знайти загальний і деякий частковий розв'язок системи, заданої над полем дійсних чисел:

$$a)\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3-4x_4=2\\ 6x_1+4x_2+4x_3-3x_4=3\\ 9x_1+6x_2+3x_3-2x_4=4\end{cases}, \qquad b)\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+2x_2+3x_3=4\\ 4x_1+5x_2+6x_3=13\end{cases},$$

$$c)\begin{cases} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}, \qquad d)\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2\\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3\\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4\end{cases},$$

$$e)\begin{cases} 8x_1+6x_2+5x_3+2x_4=21\\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=10\\ 4x_1+2x_2+3x_3+x_4=8\\ 3x_1+5x_2+x_3+x_4=15\\ 7x_1+4x_2+5x_3+2x_4=18\end{cases} \qquad f)\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6\end{cases},$$

$$g)\begin{cases} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5=5\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5=4\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5=0\\ 2x_1+\ \ x_2+7x_3+3x_4+2x_5=1\end{cases}, \qquad i)\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=4\\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4=5\\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4=2\\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4=1\\ x_1-7x_2-x_3+2x_4=7\end{cases}.$$

68. Дослідити систему та знайти загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ

$$a)\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=2\\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4\\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4\\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7\end{cases}, \qquad b)\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1\end{cases}.$$

69. Дослідити сумісність, знайти загальний і деякий частковий розв'язок системи, заданої над полем $\mathbb{F}_2$:

$$a)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ x_1+x_2+x_4=1\\ x_2-x_3+x_4=0\\ x_1+x_2+x_3+x_4=0\end{cases}, \qquad b)\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_3+2x_4=1\\ x_2+x_3+x_4=1\\ x_1+x_4=0\end{cases},$$

$$c)\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=1\\ x_1+x_3+x_4=0\\ x_2+x_4=0\\ x_1+x_2+x_3=1\end{cases}.$$

70. Дослідити сумісність, знайти загальний і деякий частковий розв'язок системи, заданої над полем $\mathbb{F}_4$:

$$a)\begin{cases} sx_1+(s+1)x_2+sx_3+x_4=1 \\ x_1+sx_2+(s+1)x_3=s \\ sx_2+x_3+(s+1)x_4=0 \\ sx_1+(s+1)x_2+x_3+x_4=s+1 \end{cases},$$

$$b)\begin{cases} sx_1+(s+1)x_2+x_3+(s+1)x_4=s+1 \\ (s+1)x_1+x_2+sx_3+x_4=1 \\ (s+1)x_2+sx_3+x_4=s+1 \\ x_1+sx_2+sx_3+(s+1)x_4=s \end{cases},$$

$$c)\begin{cases} sx_1+x_2+x_3+(s+1)x_4=s+1 \\ (s+1)x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+sx_2+sx_3+x_4=s \\ sx_1+sx_2+sx_3+sx_4=s+1 \end{cases}, \qquad d)\begin{cases} (s+1)x_2+x_3=1 \\ (s+1)x_1+x_2+(s+1)x_3=1 \\ x_1+sx_2+sx_3=s+1 \end{cases}.$$

71. Дослідити систему лінійних рівнянь над полем $\mathbb{F}_2$ в залежності від значення параметра λ.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1 \end{cases}.$$

72. Дослідити систему лінійних рівнянь над полем $\mathbb{F}_2$ в залежності від значення параметра λ.

$$\begin{cases} sx_1+sx_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+sx_3+sx_4=1 \\ (s+1)x_1+x_2+(s+1)x_4=s+1 \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=s \end{cases}.$$

Розділ 3

Алгебра матриць

Нагадаємо, що матрицею розміру $m \times n$ (m рядків, n стовпчиків) над полем $\mathbb{F}$ називається прямокутна таблиця виду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3.0.1}$$

де матричні елементи a_{ij} є елементами поля $\mathbb{F}$. Зокрема при $m = 1$ маємо вектор-рядок, а при $n = 1$ вектор-стовпчик.

Перехід від матриці A до матриці

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{3.0.2}$$

рядки якої є відповідними стовпчиками матриці A називається **транспонуванням** матриці A.

Якщо $m = n$, то матриця називається **квадратною**. Надалі ми часто будемо вживати і скорочену форму запису матриць:

$$A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$$

або просто

$$A = (a_{ij})\,,$$

якщо зрозуміло з контексту які розміри матриці.

На множині матриць фіксованого розміру $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$ введемо операції.

1. Добутком елемента $\lambda \in \mathbb{F}$ на матрицю $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}}$ називається матриця $\lambda \cdot A, (= A \cdot \lambda)$ у якої i, j-й матричний елемент є $\lambda \cdot a_{ij}$.

2. Сумою двох матриць $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ розмірів $m \times n$ називається матриця того ж розміру, матричні елементи якої є сумами відповідних матричних елементів матриць A та B:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Завдання. Доведіть що $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Доведіть, що матриці фіксованого розміру $m \times n$ утворюють абелеву (комутативну) групу відносно так введеної операції додавання.

Якщо має місце матрична рівність:

$$B = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k,$$

$\lambda_i \in \mathbb{F}, i = 1, 2, \ldots, k$, то говорять, що матриця B є **лінійною комбінацією** матриць $A_1, A_2, \ldots, A_k$ з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Особливо часто зустрічаються ситуації, коли матриці $B, A_1, A_2, \ldots, A_k$ є векторами-рядками або векторами-стовпчиками.

Наприклад систему лінійних рівнянь (2.0.1), можна подати як одне лінійне рівняння, що зв'язує вектор-стовпчики:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{3.0.3}$$

Отже, задачу про розв'язання системи лінійних рівнянь можна сформулювати, як задачу про можливість подання останнього стовпчика розширеної матриці системи як лінійної комбінації стовпчиків основної матриці і знаходження всіх таких лінійних комбінацій.

Введемо в розгляд матриці спеціального виду $\varepsilon(i, j)$, в якій матричний $(i, j)-$ елемент дорівнює 1, а решта є нульовими. Легко бачити, що для довільної матриці $A = (a_{ij})$ має місце

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} \varepsilon(i, j).$$

3. Нехай A — матриця розміру $m \times n$, а $B-$ матриця розміру $n \times k$, тоді добутком матриць A та B називається матриця $C = A \cdot B$, розміру $m \times k$, у якої на перетині $i-$того рядка та $j-$ того стовпчика стоїть елемент

$$c_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \cdot b_{lj} \tag{3.0.4}$$

Зокрема, якщо матриця A є вектором-рядком, тобто матрицею розміру $1\times n$, а матриця B є вектором-стовпчиком, тобто матрицею розміру $n\times 1$, то добутком таких матриць буде число

$$c=\sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{s1}.$$

Тепер добуток матриці A — розміру $m\times n$ на матрицю $B-$ розміру $n\times k$ можна визначити як матрицю C розміру $m\times k$, у якої матричний елемент c_{ij} є добутком i-го рядка на j-й стовпчик.

Доведіть формулу

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T. \tag{3.0.5}$$

З формули 3.0.4 легко отримати формулу для i-го рядка матриці $C:$

$$(c_{i1},c_{i2},\ldots,c_{ik}) = a_{i1}(b_{11},b_{12},\ldots,b_{1k})+a_{i2}(b_{21},b_{22}\ldots,b_{2k})+\ldots+,a_{in}(b_{n1},b_{n2},\ldots,b_{nk}).$$

Тобто $i-$ й рядок добутку матриць є лінійною комбінацією рядків другої матриці з коефіцієнтами, які стоять в i-му рядку першої матриці. Аналогічна формула має місце для j-го стовпчика матриці $C:$

$$\begin{pmatrix} c_{1j}\\ c_{2j}\\ \ldots\\ c_{mj}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \ldots\\ a_{m1}\end{pmatrix} b_{1j} + \begin{pmatrix} a_{12}\\ a_{22}\\ \ldots\\ a_{m2}\end{pmatrix} b_{2j}+\ldots+\begin{pmatrix} a_{1n}\\ a_{2n}\\ \ldots\\ a_{mn}\end{pmatrix} b_{nj}.$$

Отже, j-й стовпчик добутку матриць є лінійною комбінацією стовпчиків першої матриці з коефіцієнтами які стоять в j-му стовпчику другої матриці.

Переконайтесь, що для довільної матриці A, добуток $\varepsilon(i,j)\cdot A$ є матриця у якої i-й рядок збігається з j-м рядком матриці A, а решта рядків є нульовими; добуток $A\cdot\varepsilon(i,j)$ є матриця, у якої $j-$ й стовпчик збігається з $i-$ м стовпчиком матриці A, а решта стовпчиків є нульовими. Зокрема, маємо формулу:

$$\varepsilon(i,j)\cdot\varepsilon(k,l) = \delta_{j,k}\cdot\varepsilon(i,l), \tag{3.0.6}$$

де $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{якщо} \quad j=k\\ 0 & \text{якщо} \quad j\neq k\end{cases}$ — символ Кронекера.

Звідси випливає, шо оскільки $(E+\lambda\epsilon_{i,j})\,A = A+\lambda\epsilon_{i,j}A = A_1$, то $i-$ й рядок отриманої матриці A_1 дорівнює сумі $i-$ го рядка матриці A, та $j-$ го рядка цієї ж матриці, помноженого на λ; решта рядків (включаючи і $j-$ й) залишається без змін.

Отже, елементарне перетворення з рядками матриці, можна реалізувати множенням зліва на матриці $E+\lambda\epsilon_{i,j}$. Для отримання відповідного перетворення зі стовпчиками слід очевидно помножити A на цю ж матрицю з правого боку. В результаті множення матриці A на матрицю $E+\lambda\epsilon_{i,i}$ зліва (з правого боку) ми отримаємо матрицю i-ий рядок якої є добутком i-го рядка (стовпчика) матриці A на $1+\lambda$.

Вправа 3.0.1. *Перевірити, що множення матриці A на матрицю $\sigma(i,j) = E-\varepsilon(i,i)-\varepsilon(j,j)+\varepsilon(i,j)+\varepsilon(j,i), i \neq j$ зліва відповідає перестановці i-го і j-го рядочків.*

Лема 3.0.1. *Нехай A — матриця розміру $m\times n$, а $B-$ матриця розміру $n\times k$, $C-$ матриця розміру $k \times l$, тоді має місце тотожність*

$$A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C, \tag{3.0.7}$$

тобто при узгоджених розмірах матриць, їх множення є асоціативною операцією.

Доведення. $j-$ й стовпчик матриці $B\cdot C$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} \sum_{s=1}^k b_{1s}c_{sj} \\ \sum_{s=1}^k b_{2s}c_{sj} \\ \dots \\ \sum_{s=1}^k b_{ns}c_{sj} \end{pmatrix}.$$

З іншого боку $i-$ й рядок матриці $A\cdot B$ дорівнює

$$\left(\sum_{s=1}^n a_{is}b_{s1}, \sum_{s=1}^n a_{is}b_{s2}, \dots, \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sk}\right),$$

Тоді добуток $i-$ го рядка матриці A на $j-$ й стовпчик матриці $B\cdot C$ дорівнює

$$\sum_{t=1}^n a_{it}\sum_{s=1}^k b_{ts}c_{sj},$$

а добуток $i-$ го рядка матриці $A\cdot B$ на матрицю C дорівнює

$$\sum_{s=1}^k\left(\sum_{t=1}^n a_{it}b_{ts}\right)c_{sj}.$$

Перестановкою порядку сум легко переконатися, що отримані вирази для $i,j-$ го елемента матриць $A\cdot(B\cdot C)$ та $(A\cdot B)\cdot C$ збігаються, що і доводить лему.

□

Наслідок 3.0.1. *Квадратні матриці утворюють напівгрупу відносно множення матриць.*

Питання. Чи буде ця напівгрупа моноїдом, тобто чи є в ній нейтральний елемент?

Теорема 3.0.1. *Множина квадратних матриць, відносно введених вище операцій додавання та множення є кільцем з одиницею.*

Доведення. Для доведення досить довести закон дистрибутивності 1.1.5. Пропонуємо це зробити самостійно. □

Кільце квадратних матриць над полем $\mathbb{F}$ відносно введених операцій додавання та множення будемо позначати $M_n(\mathbb{F})$, а нейтральний елемент відносно множення будемо називати одиничною матрицею і позначати через E.

3.1 Оборотні матриці.

Згідно леми 1.1.1, множина оборотних елементів $M_n^*(\mathbb{F})$ є групою, яка надалі буде позначатися $GL_n(\mathbb{F})$ (general linear group), а її елементи будуть називатися **оборотними матрицями**. Отже, оборотня матриця це така матриця A, що $\exists A^* \in M_n(\mathbb{F})$:

$$A^* \cdot A = A \cdot A^* = E. \tag{3.1.8}$$

Звернемо увагу на те, шо матриця A^* очевидно є також оборотною.

Приклад 3.1.1. *Одинична матриця E є очевидно оборотною.*

Приклад 3.1.2. *Матриці виду $E + \lambda\varepsilon(i, j), i \neq j$ де $\lambda \in \mathbb{F}$ — довільний елемент, є оборотними.*

Для доведення слід скористатися законами дистрибутивності та формулою 3.0.6, згідно якої

$$(E - \lambda\varepsilon(i, j)) \cdot (E + \lambda\varepsilon(i, j)) = E - \lambda\varepsilon(i, j) + \lambda\varepsilon(i, j) + \lambda^2\delta_{i,j}\varepsilon(i, j).$$

При $i \neq j$, останній доданок в правій частині дорівнює нульовій матриці, а отже вся права частина є матриця E. Аналогічно перевіряється, що

$$(E + \lambda\varepsilon(i, j)) \cdot (E - \lambda\varepsilon(i, j)) = E.$$

Приклад 3.1.3. *Матриці $\sigma(i, j) = E - \varepsilon(i, i) - \varepsilon(i, i) + \varepsilon(i, j) + \varepsilon(j, i), i \neq j$, є оборотними.*

Приклад 3.1.4. *Нульова матриця не є оборотною, бо її добуток на будь-яку матрицю є нульова матриця. Більш того, будь-яка матриця, яка містить нульовий рядок або стовпчик не є оборотною. Чому?*

Властивості оборотних матриць.

Лема 3.1.1. *Якщо матриця C є оборотною і для деяких матриць A, B має місце одна з матричних рівностей або $A \cdot C = B \cdot C$ або $C \cdot A = C \cdot B$, то $A = B$.*

Доведення. Для доведення досить помножити матричні рівності на C^* з правого та лівого боку відповідно. □

Лема 3.1.2. *Якщо матриця A є оборотною, то існує єдина матриця A^*, для якої має місце* (3.1.8).

Доведення. Дійсно, нехай для деякої матриці $\bar{A}$ також має місце $\bar{A} \cdot A = A \cdot \bar{A} = E$. Помножимо обидві частини рівності $\bar{A} \cdot A = E$ з правого боку на A^*, тоді отримаємо $\left(\bar{A} \cdot A\right) \cdot A^* = E \cdot A^*$. Скориставшись асоціативністю множення, та формулою (3.1.8) маємо $\bar{A} = A^*$. □

Означення 3.1.1. *Для оборотних матриць A ця єдиним чином визначена матриця A^* називається* **оберненою до матриці** *A і надалі буде позначатись A^{-1}.*

Лема 3.1.3. *Якщо для деякої матриці A і оборотної матриці C має місце або $C \cdot A = E$ або $A \cdot C = E$, то матриця A є оборотною і $C = A^{-1}$.*

Доведення. Якщо $C \cdot A = E$, то, враховуючи оборотність C

$$A = C^{-1} \cdot E = E \cdot C^{-1}.$$

Домножимо рівність зліва C:

$$A \cdot C = E \cdot C^{-1} \cdot C = E.$$

□

Лема 3.1.4. *Якщо матриця B не є оборотною, а матриця A є оборотною, то матриці $A \cdot B$ та $B \cdot A$ не є оборотними.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що матриця $A \cdot B = C$ є оборотною, тоді, враховуючи оборотність матриці A будемо мати $B = A^{-1} \cdot C$ і B є оборотною, як добуток оборотних матриць. Отримана суперечність доводить лему. □

Теорема 3.1.1. *Квадратна матриця є оборотною тоді і тільки тоді, коли елементарними перетвореннями рядків її можна привести до одиничної матриці.*

Доведення. $\Leftarrow$. Припустимо, що матрицю A елементарними перетвореннями рядків приводиться до матриці E. Оскільки, як ми бачили, елементарні перетворення над рядками можна реалізувати множенням зліва на певні оборотні матриці, що можна записати наступним чином:

$$C_k \cdot C_{k-1} \cdot \ldots \cdot C_1 \cdot A = E.$$

Матриця $C = C_k \cdot C_{k-1} \cdot \ldots \cdot C_1$ є оборотною, як добуток оборотних матриць, а тоді, за лемою 3.1.4, є оборотною матриця A і $A^{-1} = C$.

$\Rightarrow$. Застосуємо алгоритм Жордана-Гауса до оборотної матриці A і приведемо її елементарними перетвореннями рядків до вигляду (2.4.20). Якщо в отриманій східчастій матриці є принаймні одна сходинка довжини більшої за одиницю, то оскільки матриця квадратна, обов'язково має бути нульовий рядок. Як вказувалося раніше, така матриця не є а оборотною, а оскільки вона є добутком $C_l \cdot C_{l-1} \cdot \ldots \cdot C_1 \cdot A = C \cdot A$, то за лемою 3.1.4 і матриця A не є оборотною. Отримана суперечність з припущенням, веде до висновку, що в отриманій квадратній матриці (2.4.20) всі сходинки мають довжину 1, а отже нульові рядки відсутні. Діленням рядків на відповідні діагональні елементи та послідовним додаванням їх вгору з відповідними коефіцієнтами ми отримаємо одиничну матрицю E. $\square$

Тепер ми можемо узагальнити лему 3.1.3.

Лема 3.1.5. *Якщо для квадратних матриць A, B має місце $A \cdot B = E$, то вони обидві є оборотними і $A = B^{-1}, B = A^{-1}$.*

Доведення. Нехай елементарними перетвореннями рядків, які реалізуються множенням на оборотню матрицю C, ми привели матрицю A до вигляду (2.4.20). Як уже зазначалося, якщо в отриманій матриці $A_1 = C \cdot A$ є принаймні одна сходинка довжини більшої від одиниці, то є і нульовий рядок. З іншого боку, маємо

$$A \cdot B = E \;\Rightarrow\; (C \cdot A) \cdot B = C \;\Rightarrow\; A_1 \cdot B = C.$$

Якщо в матриці A_1 є нульовий рядок, то і в матриці $A_1 \cdot B$ є нульовий рядок, що суперечить оборотності матриці C. Таким чином, всі сходинки матриці A_1 мають одиничну довжину і вона не містить нульових рядків. Тоді, як уже зазначалося, матриця A_1, а отже і A зводиться до одиничної елементарними перетвореннями рядків. За теоремою 3.1.1, матриця A є оборотною. Тепер твердження випливає з леми 3.1.3.

$\square$

3.2 Системи лінійних рівнянь у матричній формі

Крім форми (3.0.3) Систему лінійних рівнянь можна записати одним матричним рівнянням:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{3.2.9}$$

Якщо основну матрицю системи позначити через A, а вектор-стовпчики невідомих та правих частин системи через $\mathbf{x}$ та $\mathbf{b}$ відповідно, то отримаємо таку форму:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{3.2.10}$$

Відповідна їй однорідна система набуде такого вигляду:

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор-стовпчик.

Вправа. Використовуючи наведену матричну форму, доведіть, що довільна лінійна комбінація розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь також є розв'язком цієї системи. Якщо матриця A є оборотною, то вектор-стовпчик $A^{-1} \cdot \mathbf{b}$ очевидно є розв'язком системи.

Використовуючи матричну форму системи лінійних рівнянь, легко довести наступну теорему.

Теорема 3.2.1. *(Про структуру розв'язку системи лінійних рівнянь.)*

Нехай $\mathbf{x^0}$ — довільний фіксований частковий розв'язок системи 3.2.10, тоді загальний розв'язок цієї системи є сумою $\mathbf{x^0}$ та загального розв'язку відповідної однорідної системи.

Доведення. Дійсно, нехай $\mathbf{x}^*$ — довільний частковий розв'язок нашої системи. Тоді маємо:

$$A \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x^0}) = A \cdot \mathbf{x}^* - A \cdot \mathbf{x^0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Отже, вектор-стовпчик $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x^0}$ є розв'язком відповідної однорідної системи, а частковий розв'язок $\mathbf{x}^*$ можна подати у вигляді: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x^0} + \mathbf{z}$.

З іншого боку, якщо $\mathbf{y}$ — довільний розв'язок однорідної системи, то маємо

$$A \cdot \left(\mathbf{x^0} + \mathbf{y}\right) = A \cdot \mathbf{x^0} + A \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

Отже, $\mathbf{x^0} + \mathbf{y}$ є розв'язком системи 3.2.10, що і завершує доведення. □

3.3 Задачі

1. Виконати дії:

$$a)\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3; \qquad d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \qquad e)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n.$$

2. Знайти всі матриці, що комутують з матрицею A:

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad b)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Знайти $f(A)$:

$$a)f(x) = x^2 - 5x + 3, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$b)f(x) = x^2 - x - 1, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Знайти обернену матрицю до матриці A:

$$a)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad b)A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \qquad c)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$d)A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad e)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; f)A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Знайти невідому матрицю X з рівнянь:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad b)\ X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$d)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad e) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти невідому матрицю X з рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розділ 4

Векторний простір над полем

Означення 4.0.1. *Множина V з заданою на ній операцією додавання $+$ називається векторним простором над полем $\mathbb{F}$, якщо*

1. *$(V,+)$ абелева (комутативна) група;*

2. *Задано відображення: $\mathbb{F}\times V \mapsto V: \quad \mathbb{F}\times V \ni (\lambda, v)\mapsto v_1=\lambda v\in V$, яке визначає правило множення векторів на скалярні величини (елементи поля $\mathbb{F}$); при цьому операції додавання "$+$"в абелевій групі V і операції додавання "$+$"і множення "$\cdot$"в полі мають бути узгоджені наступним чином:*

   2.1 $\forall\lambda\in\mathbb{F}\ \ \forall v_1\in V\ \forall v_2\in V \qquad \lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2;$

   2.2 $\forall\lambda\in\mathbb{F}\ \forall\mu\in\mathbb{F}\quad \forall v\in V \qquad (\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v;$

   2.3 $\forall\lambda\in\mathbb{F}\ \forall\mu\in\mathbb{F}\quad \forall v\in V \qquad (\lambda\cdot\mu)v=\lambda\,(\mu v)\,;$

   2.4 якщо $1\in\mathbb{F}$ — одиниця поля (нейтральний елемент відносно множення), то $\forall v\in V \qquad 1v=v$.

Означення 4.0.2. *Підмножина $W\subset V$ векторного простору $V=V(\mathbb{F})$ називається* **підпростором** *, якщо*

$$\forall w_1,w_2\in W\quad w_1+w_2\in W,\quad \forall\lambda\in\mathbb{F}\ \ \forall w\in W\ \ \lambda w\in W.$$

Приклад 4.0.1. *Тривіальним прикладом векторного простору є абелева група, яка містить єдиний елемент 0, для якого має місце $\forall\lambda\in\mathbb{F}\ \ \lambda 0=0$. Такий векторний простір будемо називати* **нульовим***і позначати (0). Легко переконатися, що довільний простір $V(\mathbb{F})$ містить (0) в якості підпростору. Дійсно, якщо $0\in V$ — нейтральний елемент по додаванню абелевої групи V, то*

$$\forall\lambda\in\mathbb{F}\ \ \lambda 0=\lambda(v-v)=\lambda v-\lambda v=0.$$

Приклад 4.0.2. *Саме поле $\mathbb{F}$ є прикладом векторного простору над собою. Якщо маємо розширення полів $\mathbb{F}\subset\widetilde{\mathbb{F}}$, наприклад $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ — поле дійсних* *чисел є розширенням поля раціональних чисел, а поле комплексних чисел є розширенням поля дійсних чисел, або скінченні поля $\mathbb{F}_4, \mathbb{F}_8$ є розширеннями поля $\mathbb{F}_2$, то буває корисним розглядати $\widetilde{\mathbb{F}}$ як векторний простір над $\mathbb{F}$.*

Приклад 4.0.3. *Узагальненням попереднього прикладу є декартова степінь поля $\mathbb{F}^n = \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F}$. Додавання і множення на скаляр із поля $\mathbb{F}$ наборів $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}$ здійснюється покоординатно. Простір $\mathbb{F}^n$ з так введеними операціями додавання і множення на скаляр називається* **арифметичним** *векторним простором.*

Приклад 4.0.4. *Як випливає з вправи перед теоремою 3.2.1, множина розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь є підпростором арифметичного векторного простору.*

Приклад 4.0.5. *Нехай $M_{m,n}(\mathbb{F})$ — множина матриць розміру $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$. Очевидно, що $M_{m,n}(\mathbb{F})$ з введеними раніше операціями додавання матриць та множення на елемент з $\mathbb{F}$ є векторним простором.*

Приклад 4.0.6. *Розглянемо булеан $2^{\mathbb{N}}$ множини натуральних чисел. В курсі дискретної математики було показано, що його можна ототожнити з множиною нескінченних послідовностей нулів та одиниць. Будемо розглядати їх, як послідовності елементів поля $\mathbb{F}_2$. Побітове додавання послідовностей $\oplus$ (XOR) та очевидне множення на скаляри $0, 1 \in \mathbb{F}_2$ задають структуру векторного простору на $2^{\mathbb{N}}$. Якщо не переходити до послідовностей - характеристичних функцій, то додавання підмножин $M, L \subseteq \mathbb{N}$ визначається як симетрична різниця $M \oplus L \subseteq \mathbb{N}$, і множення на скаляр визначається таким чином: $0M = \varnothing, \quad 1M = M$.*

Приклад 4.0.7. *Аналогічним чином (покоординатно) вводиться структура векторного простору на множині $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ нескінчених послідовностей елементів поля $\mathbb{F}$.*

Приклад 4.0.8. *Кільце поліномів $\mathbb{F}[x]$ над полем $\mathbb{F}$ з природними операціями додавання поліномів та множення на скаляр з $\mathbb{F}$ є також прикладом векторного простору.*

Приклад 4.0.9. *Як відомо з курсу математичного аналізу, сума неперервних на проміжку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функцій є неперервною функцією, а добуток неперервної функції на дійсне число є також неперервною функцією. Отже, неперервні на проміжку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функції утворюють векторний простір, який буде позначатись $C[a, b] \quad (C - continuous)$.*

Означення 4.0.3. *Векторні простори $V = V(\mathbb{F})$ та $W = W(\mathbb{F})$ називаються* **ізоморфними***, якщо існує бієкція $\phi : V \leftrightarrow W$:*

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2);$$

$$\forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{F} \quad \phi(\lambda v) = \lambda \phi(v).$$

За цих умов біекція ϕ називається **ізоморфізмом** *векторних просторів.*

Якщо $V = W$, то біекція, з вказаними властивостями називається **автоморфізмом** *векторного простору.*

Приклад 4.0.10. *Векторні простори $M_{m,n}(\mathbb{F})$ та $\mathbb{F}^{mn}$ є ізоморфними.*

Для побудови ізоморфізму слід рядки матриці записати в один рядок довжини mn. Перевірте, що отримане відображення $M_{m,n}(\mathbb{F}) \mapsto \mathbb{F}^{mn}$ дійсно є ізоморфізмом.

Лема 4.0.1. *Нехай V — підпростір векторів-стовпчиків (векторів -рядків) відповідного арифметичного простору і C оборотна матриця відповідного розміру. Тоді простір V ізоморфний простору $C \cdot V = \{C \cdot v | v \in V\}$, $(V \cdot C = \{v \cdot C | v \in V\})$.*

Доведення. Те що підмножина векторів-стовпчиків $C \cdot V$(векторів- рядків $V \cdot C$) є векторним-підпростором арифметичного простору, пропонуємо довести самостійно; це є правильним для довільної матриці C (не обов'язково оборотної). Доведемо, що відображення $v \mapsto Cv$, $(v \mapsto vC)$ є ізоморфізмом. Його біективність випливає з леми 3.1.1. А з властивості диструбутивності множення матриць:
$C \cdot (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 C \cdot v_1 + \lambda_2 C \cdot v_2$ випливає, що це відображення є ізоморфізмом. □

Внутрішні конструкції.

4.0.1 Побудова з одних векторних просторів з інших.

Приклад 4.0.11. *Нехай $V = V(\mathbb{F})$ векторний простір і $W_1, W_2 \subset V$ два його підпростори, тоді $W_1 \cap W_2$ є підпростором.*

Вправа 4.0.1. *За яких умов об'єднання $W_1 \cup W_2$ є векторним підпростором?*

Приклад 4.0.12. *В ситуації попереднього прикладу, розглянемо множину*

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 | w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\} \subseteq V. \tag{4.0.1}$$

Легко перевірити, що $W_1 + W_2$ є векторним підпростором, причому він буде мінімальним (відносно включення $\subset$) підпростором, що містить підпростори W_1 та W_2.

Означення 4.0.4. *Векторний підпростір $W_1 + W_2 \subseteq V$ називають векторним підпростором породженим підпросторами W_1, W_2 або* **сумою векторних просторів** *W_1 та W_2.*

Означення 4.0.5. *Вектор*

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{F}, \tag{4.0.2}$$

називається **лінійною комбінацією** *векторів* $v_1, v_2, \ldots$.

Приклад 4.0.13. *Нехай* $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ *– система (не обов'язково скінченна) векторів з векторного простору* V*. Розглянемо множину лінійних комбінацій векторів з цієї системи:*

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots) = \left\{ \sum_i \lambda_i v_i | \lambda_i \in \mathbb{F} \right\} \subseteq V, \tag{4.0.3}$$

зауважимо, що розглядаються лише скінченні суми векторів. Неважко переконатися, що $\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots)$ *є мінімальним підпростором, що містить вектори* $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ *і його називають підпростором, що* **породжується** *векторами* $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$.

Вправа. Доведіть, що для довільних $\lambda \in \mathbb{F}, i, j$ мають місце рівності

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots) = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, \ldots) =$$
$$= \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k, \ldots).$$

Означення 4.0.6. *Система векторів* $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots \in V$*, для яких* $\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots) = V$ *будемо називати* **твірною** *або* **породжуючою** *системою векторів простору* V*.*

Векторний простір, який має скінченну твірну систему векторів називається **скінченновимірним***.*

Іншими словами, довільна (не обов'язково скінченна) сукупність векторів $\{v_i \in V | i \in I\}$ є твірною або породжуючою для векторного простору V, якщо для будь-який вектора $v \in V$ можна подати як лінійну комбінацію векторів із цієї системи.

Зовнішні конструкції.

Означення 4.0.7. *Нехай* $V_1 = V_1(\mathbb{F}), V_2 = V_2(\mathbb{F})$ *два векторних простори над полем* $\mathbb{F}$*. На декартовому добутку* $V_1 \times V_2$ *структура векторного простору вводиться таким чином:*

$$(v_1, v_2) + (v_1', v_2') = (v_1 + v_1', v_2 + v_2'), \quad \lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2),$$

$v_1, v_1' \in V_1, v_2, v_2' \in V_2,\ \lambda \in \mathbb{F}$*. Отриманий векторний простір називається декартовим добутком векторних просторів* V_1, V_2*.*

Задача. Нехай $1 \leq k \leq n$, доведіть, що векторний простір $\mathbb{F}^n$ ізоморфний декартовому добутку $\mathbb{F}^k \times \mathbb{F}^{n-k}$.

Нехай W підпростір простору $V = V(\mathbb{F})$. Введемо на V відношення еквівалентності:

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 \sim v_2 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 - v_2 \in W.$$

Перевірте, що це дійсно є відношенням еквівалентності. Елементами фактор-множини $V/\sim$ є підмножини векторів з V, які мають вигляд:

$$v + W = \{v + w | w \in W\}.$$

Введемо на фактор-множині $V/\sim$ структуру векторного простору над полем $\mathbb{F}$ наступним чином:

$$(v_1 + W) + (v_2 + W) = (v_1 + v_2) + W,$$

$$\lambda (v + W) = (\lambda v) + W.$$

Перевірте, що так введені операції не залежать від вибору представників v_1, v_2 класів еквівалентності і що всі умови з означення векторного простору виконуються.

Означення 4.0.8. *Побудований векторний простір називається* **фактор-простором** *і позначається V/W.*

Приклад 4.0.14. *Нехай $\mathbb{F}^n$- арифметичний векторний простір. Очевидно, що сукупність наборів виду $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$ утворюють векторний підпростір, який ізоморфний простору $\mathbb{F}^k$. Елементами фактор-простору V/W є множини наборів виду: $A_{\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n} = \{(*, *, \ldots, *, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n) | * \in \mathbb{F}\}$.*

Покажіть, що отриманий фактор-простір ізоморфний арифметичному простору $\mathbb{F}^{n-k}$.

Означення 4.0.9. *Відображення векторного простору в поле $l : V = V(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ називається* **лінійним функціоналом**, *визначеним на просторі V , якщо*

$$\forall v_1, v_2 \in V \quad l(v_1 + v_2) = l(v_1) + l(v_2),$$

$$\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{F} \quad l(\lambda v) = \lambda \cdot l(v).$$

Приклад 4.0.15. *Нехай $\mathbb{F}^n-$ арифметичний векторний простір, тоді відображення*

$$\mathbb{F}^n \ni (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

є лінійним функціоналом. Якщо $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$ — поле з двох елементів, а сума є побітове додавання $\oplus$ (XOR), то вказаний функціонал є **контрольна сума** *бітів α_i. Аналогічно будуються контрольні суми масивів елементів інших скінченних полів, зокрема байтів. При передачі даних контрольна сума передається разом з масивом.*

Приклад 4.0.16. *Прикладом лінійного функціоналу в просторі неперервних функцій $C[a,b]$ є визначений інтеграл:*

$$f(x) \mapsto \int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 4.0.17. *Розглянемо множину лінійних функціоналів заданих на просторі $V = V(\mathbb{F})$:*

$$V^* = \{l : V \to \mathbb{F}\}. \tag{4.0.4}$$

Операції додавання функціоналів та множення на скаляр вводяться так само як і для функцій - поточково:

$$(l_1 + l_2)(v) = l_1(v) + l_2(v), \quad (\lambda l)(v) = \lambda \cdot l(v). \tag{4.0.5}$$

Множина лінійних функціоналів V^* з так введеними операціями є векторним простором, який називається **двоїстим** *простором до простору V.*

Узагальненням лінійного функціоналу є поняття білінійного функціоналу.

Означення 4.0.10. *Будемо говорити, що на векторному просторі $V = V(\mathbb{F})$ задано білінійний функціонал, якщо визначено відображення: $F : V \times V \mapsto \mathbb{F}$, що має властивості*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \ \ \forall u, v, w \in V \ \ F(\lambda u + \mu v, w) = \lambda F(u, w) + \mu F(v, w),$$
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \ \ \forall u, v, w \in V \ \ F(u, \lambda v + \mu w) = \lambda F(u, v) + \mu F(u, w).$$

Приклад 4.0.18. *Нехай $v = \mathbb{F}^n$ — арифметичний векторний простір і $u = (x_1, x_2, \dots, x_n), v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Тоді для будь-яких $a_{ij} \in \mathbb{F}, i, j = 1, 2, \dots, n$ відображення*

$$(u, v) \to F(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

є білінійним функціоналом. Перевірку зробити самостійно.

Означення 4.0.11. *Білінійна форма F на векторному просторі V називається* **симетричною**, *якщо*

$$\forall u \forall v \quad F(u, v) = F(v, u);$$

і називається **кососиметричною**, *якщо*

$$\forall u \forall v \quad F(u, v) = -F(v, u).$$

Приклад 4.0.19. *Білінійна форма з прикладу 4.0.18 буде симетричною (кососиметричною) тоді і тільки тоді, коли* $\forall i, j \ \ a_{ij} = a_{ji} \ \ (a_{ij} = -a_{ji})$ *відповідно. Доведіть це самостійно.*

Звернемо увагу на те, що для будь-якого фіксованого вектора u^* білінійна форма визначає лінійні функціонали на V: $l_1(v) = F(u^*, v)$ та $l_2(v) = F(v, u^*)$.

Білінійні форми визначені на даному векторному просторі $V = V(\mathbb{F})$ самі утворюють векторний простір відносно операцій:

$$(F + G)(u, v) = F(u, v) + G(u, v) \tag{4.0.6}$$

$$(\lambda \cdot F)(u, v) = \lambda (F(u, v)). \tag{4.0.7}$$

Вправа 4.0.2. *Доведіть, що симетричні та кососиметричні функціонали утворюють векторні підпростори. Визначити перетин цих підпросторів.*

Теорема 4.0.1. *Якщо поле* $\mathbb{F}$ *таке, що* $1 + 1 = 2 \neq 0$, *то будь-яку білінійну форму* F *на векторному просторі* $V = V(\mathbb{F})$ *можна подати як суму симетричної та кососиметричної форм.*

Доведення. Очевидно, що форма $G(u, v) = F(u, v) + F(v, u)$ є симетричною, а форма $H(u, v) = F(u, v) - F(v, u)$ є кососиметричною і

$$F(u, v) = \frac{1}{2} (G(u, v) + H(u, v)).$$

□

4.1 Лінійна залежність векторів

Означення 4.1.1. *1. Скінченна система векторів* $v_1, v_2, \ldots, v_k$ *векторного простору* $V = V(\mathbb{F})$ *називається* **лінійно незалежною**, *якщо*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0 \tag{4.1.8}$$

2. Нескінченна система векторів $v_i, i \in I$, *векторного простору* $V = V(\mathbb{F})$ *називається* **лінійно незалежною**, *якщо будь-яка її скінченна підсистема є лінійно незалежною.*

Завдання. Дайте означення лінійно залежної системи векторів.

Властивості лінійно залежних векторів.

1. Якщо нульовий вектор $\mathbf{0}$ належить системі векторів $v_1, v_2, \ldots, v_k$, то вона є лінійно залежною.

Дійсно, для довільного $\lambda \in \mathbb{F}, \lambda \neq 0$ має місце рівність

$$0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda\mathbf{0} + \ldots + 0v_k = \mathbf{0},$$

яка і доводить лінійну залежність векторів.

2. Якщо система векторів $v_1, v_2, \ldots, v_k$ містить два однакових вектора, то вона є лінійно залежною.

   Довести самостійно.

3. Якщо пара ненульових векторів $\{v_1, v_2\}$ є лінійно залежними, то вони колініарні, тобто існує число $\lambda \in \mathbb{F}$ таке, що $v_1 = \lambda v_2$.

   Довести самостійно.

4. Якщо трійка ненульових векторів $\{v_1, v_2, v_3\}$ є лінійно залежними, то вони компланарні, тобто існують $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ такі, що $v_1 = \lambda v_2 + \mu v_3$.

   Довести самостійно.

5. Якщо вектор $v \in V$ можна подати як лінійну комбінацію $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ системи лінійно незалежних векторів $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, то це можна зробити єдиним способом.

   Дійсно, якщо $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i$, то $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \mu_i) v_i$ і з незалежності векторів випливає $\lambda_i = \mu_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$.

6. Система векторів $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли один з цих векторів можна подати як лінійну комбінацію решти.

   Довести самостійно.

7. Якщо система $v_1, v_2, \ldots, v_k$ векторів містить лінійно залежну підсистему, то вона є лінійно залежною.

   Довести самостійно.

8. Система векторів арифметичного векторного простору виду

$$\begin{array}{lclllllll} v_1 & = & (\underline{a_{11}}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots & a_{1k}, & \ldots & a_{1n}) \\ v_2 & = & (0, & \underline{a_{22}}, & a_{23}, & \ldots & a_{2k}, & \ldots & a_{2n}) \\ v_3 & = & (0, & 0, & \underline{a_{33}}, & \ldots & a_{3k}, & \ldots & a_{3n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_k & = & (0, & 0, & 0, & \ldots & \underline{a_{kk}}, & \ldots & a_{kn}) \end{array}, \qquad (4.1.9)$$

   де підкреслені координати відмінні від нуля, є лінійно незалежною системою векторів.

   Довести самостійно.

Вправа 4.1.1. *Довести таке узагальнення властивості 6: якщо система векторів $v_1, v_2, \ldots, v_k$ лінійно залежна, то серед векторів цієї системи знайдеться вектор, який є лінійною комбінацією попередніх векторів.*

Лема 4.1.1. *Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_k$ і $w_1, w_2, \ldots, w_l$ дві системи векторів лінійного простору V. Якщо $k > l$ і вектори першої системи є лінійними комбінаціями векторів другої, тобто*

$$v_i = \sum_{j=1}^{l} \alpha_{ij} w_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{4.1.10}$$

то система векторів $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ є лінійно залежною.

Доведення. Доведення леми проведемо методом математичної індукції по l — кількості векторів у другій системі. База індукції: $l = 1$. Тоді всі вектори v_i пропорційні одному вектору і очевидно є лінійно залежними.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження доведено для системи векторів, у яких друга система містить менше ніж l векторів. Якщо має місце (4.1.10), де $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \ldots = \alpha_{k1} = 0$, то насправді вектори v_i є лінійними комбінаціями векторів із системи $w_2, w_3, \ldots, w_l$, яка містить $l-1$ векторів і твердження випливає з припущення індукції. Нехай принаймні один з α_{i1} відмінній від нуля. Не втрачаючи загальності можна вважати, що $\alpha_{11} \neq 0$. Розглянемо нову систему векторів: $v_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} v_1, v_3 - \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}} v_1, \ldots, v_k - \frac{\alpha_{k1}}{\alpha_{11}} v_1$. Віднімаючи перше рівняння помножене на $\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ від i-го рівняння в системі (4.1.10), $i = 2, 3, \ldots, l$, приходимо до висновку, що вектори цієї системи є лінійними комбінаціями векторів із системи $w_2, w_3, \ldots, w_l$, а отже, за припущенням індукції є лінійно залежними. Таким чином, існують скаляри $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$, не всі рівні нулю, що

$$\sum_{i=2}^{k} \lambda_i \left(v_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} v_1 \right) = \mathbf{0}, \quad \text{звідки} \quad \sum_{i=2}^{k} \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=2}^{k} \lambda_i \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} \right) v_1 = \mathbf{0}.$$

В лівій частині останньої рівності стоїть лінійна комбінація векторів v_1, v_2, …, v_k, в якій не всі коефіцієнти дорівнюють нулю, отже ці вектори є лінійно залежними. □

Теорема 4.1.1. *Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — система векторів простору V, тоді наступні твердження еквівалентні:*

1. *$v_1, v_2, \ldots, v_n$ є максимальною (по кількості векторів) лінійно незалежною системою векторів;*

2. *$v_1, v_2, \ldots, v_n$ є мінімальною (по кількості векторів) системою твірних простору V;*

3. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є лінійно незалежною системою твірних простору V.

Доведення. 1 $\Rightarrow$ 2. Максимальна по кількості векторів лінійно незалежна система векторів має бути системою твірних. Дійсно, якщо існує вектор, який не можна подати як лінійну комбінацію системи $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то цей вектор можна приєднати до цієї системи і отримати лінійно незалежну систему з $n+1$-го вектора, що суперечить умові максимальності. З іншого боку, якщо існує твірна система векторного простору, що містить k векторів, $k < n$, то всі вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ мають бути лінійними комбінаціями від k векторів вказаної твірної системи. Але тоді за лемою 4.1.1 вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є лінійно залежними, що суперечить умові 1.

2 $\Rightarrow$ 1. Нехай $w_1, w_2, \ldots, w_k,\ k > n,$ — деяка система векторів. За умовою 2, $w_i, i = 1, 2, \ldots, k,$ мають бути лінійними комбінаціями векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$ і за лемою 4.1.1 вектори $w_1, w_2, \ldots, w_k$ є лінійно залежними. Отже, кожна лінійно незалежна система може містити не більше ніж n векторів. Крім того сама система векторів $v_1, v_2, \ldots, v_n$ має бути лінійно незалежною. В протилежному випадку один з векторів є лінійною комбінацією решти і може бути вилучений з системи. Отримана система з $n-1$ векторів буде очевидно також твірною, а це суперечить умові мінімальності.

2 $\Rightarrow$ 3. Мінімальна (по кількості векторів) система твірних $v_1, v_2, \ldots, v_n$ має бути лінійно незалежною. Якщо це не так, то за властивістю 5 лінійно залежних векторів, одни з векторів v_i має бути лінійною комбінацією решти векторів. Але тоді його можна вилучити з системи і ті $n-1$ векторів що залишились, теж утворюють твірну систему. Це суперечить умові 2 про мінімальність n — можливої кількості елементів у твірній системі.

3 $\Rightarrow$ 2. Якщо існує твірна система, що містить менше ніж n векторів, то вектори v_i мають бути лінійними комбінаціями сукупності, що містить менше ніж n векторів, а отже за лемою 4.1.1 бути лінійно залежними, що суперечить умові 3. □

Означення 4.1.2. *Впорядкована система векторів $(v_i | i \in I) \subset V$ називається* **базисом** *векторного простору V, якщо вона є*

1. *лінійно незалежною;*
2. *твірною системою для векторного простору V.*

Приклад 4.1.1. *Сукупність векторів арифметичного векторного простору $\mathbb{F}^n$*

$$\begin{array}{ccccccc} \epsilon_1 & = & (1, & 0, & 0, & \ldots, & 0) \\ \epsilon_2 & = & (0, & 1, & 0, & \ldots, & 0) \\ \epsilon_3 & = & (0, & 0, & 1, & \ldots, & 0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \epsilon_n & = & (0, & 0, & 0, & \ldots, & 1) \end{array}, \qquad (4.1.11)$$

є базисом цього простору. Доведіть це.

Цей базис називається **канонічним** *базисом арифметичного векторного простору.*

Для скінченновимірних просторів умови 1 та 2 теореми 4.1.1 можна розглядати як еквівалентні означення базису. З цих умов негайно випливає, що всі базиси скінченновимірного простору складаються з однакової кількості векторів. Це число — кількість векторів в базисі простору $V = V(\mathbb{F})$ називається **розмірністю** простору і позначається $\dim_{\mathbb{F}} V$ або просто $\dim V$.

Зокрема, розмірність нульового простору дорівнює нулю, а розмірність арифметичного простору $\mathbb{F}^n$ дорівнює n.

Лема 4.1.2. *Якщо V_1, V_2 — пара ізоморфних векторних просторів, то ізоморфним образом будь-якого базису простору V_1 є базис простору V_2, зокрема $\dim V_1 = \dim V_2$.*

Доведення. Доведення пропонуємо провести самостійно. □

Лема 4.1.3. *Якщо W — підпростір скінченновимірного простору V, то будь-який базис підпростору W може бути доповнений до базису простору V.*

Доведення. Дійсно, якщо $(w_i | i \in I)$ — базис простору W і $W \neq V$, то існує вектор $v \notin W$ додаємо його до базису і розглянемо простір $W_1 = W + (v)$, де (v) — одновимірний підпростір породжений вектором v. Якщо $W_1 \neq V$, то знову обираємо $v_1 \in V \setminus W_1$ і приєднуємо його до базису підпростору W_1 і породжуємо підпростір $W_2 = W_1 + (v_1)$. В такий спосіб ми отримуємо ланцюг підпросторів

$$W \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_k \subseteq V.$$

Внаслідок того, що $\dim V < +\infty$, для деякого k будемо мати $W_k = V$, а побудований базис простору W_k як раз і буде потрібним розширенням базису підпростору W. □

Лема 4.1.4. *Нехай W — підпростір скінченновимірного простору V, $\dim W = k, \dim V = n$ і $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, e_n$ — розширення базису W до базису V, то класи векторів $e_{k+1} + W, e_{k+2} + W, \ldots, e_n + W$ утворюють базис фактор-простору V/W*

Доведення. Доведення пропонуємо провести самостійно. □

Наслідок 4.1.1. *Має місце формула*

$$\dim V = \dim W + \dim V/W.$$

Лема 4.1.5. *Нехай W_1, W_2 — підпростори скінченновимірного простору V, тоді має місце формула*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2. \tag{4.1.12}$$

Доведення. Доповнимо базис $e_1, e_2, \ldots, e_k$ простору $W_1 \cap W_2$ до базисів просторів $W_1 -$ $e_1, e_2, \ldots, e_k, u_1, u_2, \ldots u_l$ та $W_2 -$ $e_1, e_2, \ldots, e_k, v_1, u_2, \ldots v_m$; $\dim W_1 = k + l, \dim W_2 = k + m$. Покажемо, що система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $u_1, u_2, \ldots u_l$, $v_1, u_2, \ldots v_m$ є базисом простору $W_1 + W_2$. Дійсно, будь-який вектор $v \in W_1 + W_2$ має вигляд $v = w_1 + w_2,\ w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$. Оскільки вказана система векторів містить підмножини, що є базисами просторів W_1 та W_2, то ця система є очевидно твірною системою для простору $W_1 + W_2$. Доведемо лінійну незалежність цієї системи. Припустимо, що деяка лінійна комбінація векторів цієї системи дорівнює нульовому вектору:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i = \mathbf{0}.$$

З цієї рівності випливає, що $w_1 = \sum_{i=1}^{l} \beta_i u_i \in W_2, w_2 = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i v_i \in W_1$, звідки $w_1, w_2 \in W_1 \cap W_2$. Оскільки довільний вектор можна однозначно представити, як лінійну комбінацію векторів базису, то в розкладах цих векторів по вищезгаданих базисах просторів W_1, W_2 коефіцієнти при векторах u_i та v_i мають бути нульовими, тобто $\beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_l = \gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m = 0$. З лінійної незалежності векторів $e_1, e_2, \ldots, e_k$ випливає, що і всі коефіцієнти α_i є нульовими.

Отже,$e_1, e_2, \ldots, e_k, u_1, u_2, \ldots u_l, v_1, u_2, \ldots v_m$ є базисом простору $W_1 + W_2$, звідки

$$\dim(W_1 + W_2) = k + l + m = (k + l) + (k + m) - k = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2.$$

□

Якщо $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, то сума просторів $W_1 + W_2$ називається прямою і позначається $W_1 \oplus W_2$.

Лема 4.1.6. *Для підпросторів $W_1, W_2 : \quad W_1 \cap W_2 = \{0\}$ існує ізоморфізм :*

$$W_1 \times W_2 \quad \leftrightarrow \quad W_1 \oplus W_2.$$

Доведення. Потрібним ізоморфізмом є відображення $(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$. Всі необхідні перевірки пропонуємо зробити самостійно. □

4.2 Координати вектора в базисі.

Нехай $V = V(\mathbb{F})$ — скінченновимірний векторний простір і $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — його базис.

Означення 4.2.1. *Довільний вектор $v \in V$ однозначно подається як лінійна комбінація векторів базису:*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \tag{4.2.13}$$

$x_i \in \mathbb{F}$; набір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається **координатами** *вектора v в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*

Теорема 4.2.1. *При фіксованому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ відповідність -*

$$\text{вектор } v \quad \leftrightarrow \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) - \text{ набір його координат,}$$

є ізоморфізмом векторних просторів $V \leftrightarrow \mathbb{F}^n$.

Доведення. Бієктивність відображення випливає з того, що кожен вектор простору V однозначно подається як лінійна комбінація базисних векторів. Залишилося показати, що сумі двох векторів відповідає сума наборів координат, а добутку вектора на скаляр добуток набору його координат на цей же скаляр. Ці прості перевірки пропонуємо зробити самостійно. □

Наслідок 4.2.1. *Будь-який скінченновимірний векторний простір над полем $\mathbb{F}$ ізоморфний арифметичному векторному простору $\mathbb{F}^n$, де $n = \dim V$.*

З'ясуємо тепер як змінюється координати вектора при переході до іншого базису. Нехай вектор v в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ має координати $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а в базисі $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ цей же вектор має координати $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. Як пов'язані набори координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ між собою. Вектори нового (штрихованого) базису можна записати як лінійні комбінації векторів старого базиса:

$$\begin{array}{rcccc} e'_1 = & c_{11}e_1 + & c_{21}e_2 + & \ldots + & c_{n1}e_n \\ e'_2 = & c_{12}e_1 + & c_{22}e_2 + & \ldots + & c_{n2}e_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e'_n = & c_{1n}e_1 + & c_{2n}e_2 + & \ldots + & c_{nn}e_n \end{array}, \tag{4.2.14}$$

де $c_{ij} \in \mathbb{F}$. У формулу

$$v = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i,$$

яка визначає координати вектора v у новому базисі, підставимо записані вище вирази елементів нового базису через елемента старого:

$$v = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji} x'_i \right) e_j$$

Коефіцієнти при векторах e_j є як раз координати вектора v в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$, отже маємо формули зв'язку

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x'_i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Введемо в розгляд матрицю

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \ldots & c_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

і вектор-стовпчики

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

тоді отриманий вище зв'язок між координатами можна переписати у матричній формі

$$\mathbf{x} = C \cdot \mathbf{x}' \tag{4.2.15}$$

Означення 4.2.2. *Матриця C називається* **матрицею переходу** *від базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ до базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.*

Зауважимо, що базиси $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ визначають матрицю переходу однозначно.

Нехай $e''_1, e''_2, \ldots, e''_n$ — ще один базис простору і C' — матриця переходу від базису $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ до базису $e''_1, e''_2, \ldots, e''_n$. Якщо координати вектора v в цьому базисі записати вектор-стовпчиком

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \ldots \\ x''_n \end{pmatrix},$$

то подвійним застосуванням формули (4.2.15) отримуємо:

$$\mathbf{x} = C \cdot \mathbf{x}' = C \cdot (C'\mathbf{x}'') = (C \cdot C')\, \mathbf{x}''.$$

З однозначності визначення матриці переходу випливає, що добуток матриць $C \cdot C'$ є нічим іншим як матрицею переходу від базису $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ до базису $(e''_1, e''_2, \ldots, e''_n)$.

Лема 4.2.1. *Матриця переходу від одного базису до іншого є оборотною.*

Доведення. Дійсно, нехай третій базис збігається з першим — $e_1 = e''_1, e_2 = e''_2, \ldots, e_n = e''_n$. Тоді матриця $C \cdot C'$ є матрицею переходу від першого базису до самого себе. Але одиничну матрицю E також можна розглядати як матрицю переходу від базису до самого себе. З однозначності визначення матриці переходу маємо $C \cdot C' = E$, звідки, за лемою 3.1.5, отримуємо $C' = C^{-1}$, що і доводить лему. □

4.3 Застосування до доліджень лінійних многовидів

Означення 4.3.1. *Направляючим векторним простором афінного многовиду, що визначаєтьси системою рівнянь $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ називаєтьси векторний простір всіх розв'язків відповідної однорідної системи $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

Як випливає з теореми про структуру розв'язку системи лінійних рівнянь, якщо зафіксувати точку $\mathbf{x}_0$ на відповідному лінійному многовиді, то всі решта можна отримати як $\mathbf{x}_0 + v, v \in V$, де V — направляючий простір многовиду.

В залежності від способу визначення направляючого підпростору один і той же лінійний афінний многовид можна задавати різними системами лінійних рівнянь. При цьому обирається вид рівняння найбільш зручний для розв'язання поставленої задачі.

Наприклад, якщо вказати базис направляючого простору $e_1, e_2, \ldots, e_k \in \mathbb{F}^n$, то відповідна система лінійних параметричних рівнянь у векторній формі набуде вигляду

$$\mathbf{x} - \mathbf{x_0} = \sum_{i=1}^{k} t_i e_i \tag{4.3.16}$$

Приклад 4.3.1. *В двовимірному арифметичному векторному просторі R^2 (на площині) одновимірний підпростір задається рівнянням: $Ax + By = 0$ (рівняння прямої, що проходить через початок координат). Відповідно довільний одновимірний лінійний многовид задається рівнянням: $Ax + By + C = 0$ (рівняння прямої, що не проходить через початок координат).*

Приклад 4.3.2. *В тривимірному арифметичному векторному просторі R^3 двовимірний підпростір задається рівнянням: $Ax + By + Cz = 0$ (рівняння площини, що проходить через початок координат). Відповідно довільний двовимірний лінійний многовид задається рівнянням: $Ax+By+Cz+D = 0$ (рівняння площини, що не проходить через початок координат). Одновимірний підпростір або многовид (пряма в просторі) є перетином двох двовимірних* *підпросторів або многовидів. Тому рівняння прямої в просторі таке:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Якщо ж направляючий простір визначається як множина розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь, $A\mathbf{x} = 0$, то відповідний многовид визначається системою лінійних рівнянь у матричній формі

$$A \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) = \mathbf{0}. \tag{4.3.17}$$

Приклад 4.3.3. *В двовимірному арифметичному векторному просторі R^2 відповідне рівняння прямої називають рівнянням прямої, що проходить через задану точку з координатами (x_0, y_0), воно має такий вигляд:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Приклад 4.3.4. *В тривимірному арифметичному векторному просторі R^3 двовимірний многовид (площина), що проходить через задану точку з координатами (x_0, y_0, z_0) задається таким рівнянням:*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

k-вимірний лінійний многовид можна визначити вказавши на ньому $k + 1$ точку $\mathbf{x}_i \in \mathbb{F}^n, i = 0, 1, 2, \ldots, k$, так що вектори $\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0 = e_j, j = 1, 2, \ldots k$ породжували направляючий простір. Після відповідних підстановок в рівняння (4.3.16), ми отримуємо рівняння k-вимірний лінійного многовиду по k точкам.

Приклад 4.3.5. *В двовимірному арифметичному векторному просторі R^2 рівняння прямої, що проходить через точки (x_1, y_1) і (x_2, y_2) має вигляд:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Приклад 4.3.6. *В тривимірному арифметичному векторному просторі R^3 рівняння прямої, що проходить через точки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) має вигляд:*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4.3.1 Ранги матриць

Означення 4.3.2. *Розмірність простору лінійних комбінацій $\mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ (див. (4.0.3)) називається* **рангом** *сукупності векторів $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Це число позначають $rank(v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Рядковим (стовпчиковим) рангом матриці називається ранг сукупності її рядків (стовпчиків).*

Питання. Як може змінитися ранг сукупності векторів, якщо до неї додати ще один вектор?

Теорема 4.3.1. *Рядковий ранг матриці збігається зі стовпчиковим.*

Доведення. Розглянемо матрицю виду:

$$\epsilon(1,1)+\epsilon(2,2)+\ldots+\epsilon(k,k)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.18)$$

У вказаної матриці рядковий ранг очевидно збігається зі стовпчиковим і дорівнює k.

З іншого боку, Будь-яка матриця A елементарними перетвореннями рядків та стовпчиків приводиться до вказаного вище вигляду. Розглянемо векторний простір V породжений рядками $v_1, v_2, \ldots, v_m$матриці. Елементарні перетворення змінюють твірну систему цього простору, але не змінюють саму лінійну оболонку $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, \ldots, v_m)$, а отже і ранг системи. Перетворення стовпчиків здійснюються шляхом множення рядків на відповідні оборотні матриці . При цьому змінюється простір $v_i \to v_i \cdot C, i = 1, 2, \ldots n$, де C — відповідна оборотна матриця. З лемою 4.0.1 множина рядків $vC, v \in V$, утворює підпростір ізоморфний простору V, а отже його розмірність збігається з $\dim V$ тобто з рядковим рангом матриці A. Отже, якщо елементарними перетвореннями рядків та стовпчиків матрицю A вдалося привести до вигляду $\epsilon(1,1) + \epsilon(2,2) + \ldots + \epsilon(k,k)$, то її рядковий ранг дорівнює k. Аналогічні міркування можна провести для множини стовпчиків $w_1, w_2, \ldots, w_n$ матриці A. Елементарні перетворення над стовпчиками не змінюють простору $W = \mathcal{L}(w_1, w_2, \ldots, w_m)$, а елементарні перетворення над рядками, згідно леми 4.0.1, переводять простір W в ізоморфний йому простір $W_1 = \{Cw | w \in W\}$, де C — відповідна невироджена матриця. Таким чином стовпчиковий ранг матриці A збігається з стовпчиковим рангом матриці $\epsilon(1,1) + \epsilon(2,2) + \ldots + \epsilon(k,k)$, а він також дорівнює k. □

Таким чином надалі можна говорити просто про ранг матриці. Використовуючи це поняття, сформулюємо критерій сумісності системи лінійних рівнянь.

Теорема 4.3.2. *(Кронекера-Капелі.)*

Система лінійних рівнянь є сумісною тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи збігається з рангом основної.

Доведення. Доведення легко отримати з зображення системи рівнянь у формі (3.2.9).

$\Rightarrow$. Якщо система сумісна, то стовпчик вільних членів є лінійною комбінацією стовпчиків основної матриці, а отже його приєднання до системи не збільшить рангу сукупності стовпчиків основної матриці.

$\Leftarrow$. Навпаки, якщо приєднання стовпчика вільних членів до сукупності стовпчиків основної матриці не збільшує рангу системи векторів, то це означає, що цей стовпчик вільних членів є лінійною комбінацією стовпчиків основної матриці, а отже система (3.2.9) є сумісною. □

Теорема 4.3.3. *Нехай маємо сумісну систему лінійних рівнянь* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *від* n *невідомих. Розмірність відповідного лінійного многовиду, тобто кількість параметрів від яких залежить загальний розв'язок системи дорівнює:* $n - rank(A)$.

Доведення. Дійсно елементарними перетвореннями рядків, та перестановкою стовпчиків за методом Гауса, розширену матрицю можна привести до виду 2.4.19. При цьому ранги як основної так і розширеної матриць дорівнюють s і це число збігається з кількістю головних змінних, які ми обираємо. Тоді кількість параметрів, що ми вводимо, очевидно дорівнює $n - s$, що і доводить твердження. □

Наслідок 4.3.1. *Нехай* $\mathbb{F}^n \supset V$ *— векторний підпростір розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *тоді* $dimV = n - rank(A)$.

4.4 Задачі

1. Довести, що система векторів, яка містить два однакові вектори, лінійно залежна.

2. Довести, що три вектори a_1, a_2, a_3 – лінійно залежні і вектор a_3 не є лінійною комбінацією векторів a_1, a_2, то вектори a_1, a_2 відрізняються між собою лише числовим множником.

3. Довести, що якщо вектори $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ лінійно незалежна, а система $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k, b$ — лінійно залежна, то вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1,\ a_2, \ldots, a_k$.

4. Довести, що впорядкована система векторів $a_1, a_2, ..., a_k$, відмінних від нуля, тоді і тільки тоді лінійно незалежна, коли ні один із цих векторів не є лінійною комбінацією попередніх.

5. Знайти вектор x з рівняння $a_1+2a_2+3a_3+4x=0$, де $a_1=(5,-8,-1,2)$, $a_2=(2,-1,4,-3)$, $a_3=(-3,2,-5,4)$.

6. З'ясувати, чи будуть лінійно залежними такі системи векторів:

$$a)\ \begin{aligned} a_1 &= (2,-3,1),\\ a_2 &= (3,-1,5),\\ a_3 &= (1,-4,3). \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} a_1 &= (4,-5,2,6),\\ a_2 &= (2,-2,1.3),\\ a_3 &= (6,-3,3,9),\\ a_4 &= (4,-1,5,6). \end{aligned}$$

7. Знайти всі значення параметра λ, при яких вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$a)\ \begin{aligned} a_1 &= (2,3,5),\\ a_2 &= (3,7,8),\\ a_3 &= (1,-6,1),\\ b &= (7,-2,\lambda), \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} a_1 &= (2,-2,1,3,5),\\ a_2 &= (3,1,2,5,6),\\ a_3 &= (3,-7,1,4,9),\\ b &= (1,-5,0,1,\lambda), \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} a_1 &= (2,2,3,5),\\ a_2 &= (2,3,4,3),\\ a_3 &= (3,2,3,4),\\ a_4 &= (-2,1,1,0),\\ b &= (-3,1,1,\lambda). \end{aligned}$$

8. Знайти всі максимальні лінійно незалежні підсистеми системи векторів:

$$\begin{aligned} a_1 &= (4,-1,3,-2),\\ a_2 &= (8,-2,6,-4),\\ a_3 &= (3,-1,4,-2),\\ a_4 &= (6,-2,8,-4). \end{aligned}$$

9. Знайти яку–небудь максимальну лінійно незалежну підсистему системи векторів і всі вектори системи, що не входять до цієї підсистеми, виразити через вектори підсистеми:

$$a)\ \begin{aligned} a_1 &= (5,2,-3,1),\\ a_2 &= (4,1,-2,3),\\ a_3 &= (1,1,-1,-2),\\ a_4 &= (3,4,-1,2). \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} a_1 &= (2,-1,3,5),\\ a_2 &= (4,-3,1,3),\\ a_3 &= (3,-2,3,4),\\ a_4 &= (4,-1,15,17),\\ a_5 &= (7,-6,-7,0). \end{aligned}$$

$$c)\ \begin{aligned} a_1 &= (1,-2,-3,1),\\ a_2 &= (3,1,4,3),\\ a_3 &= (5,1,-1,-2),\\ a_4 &= (3,-3,-8,-4),\\ a_5 &= (2,3,-1,2). \end{aligned} \qquad d)\ \begin{aligned} a_1 &= (6,-1,2,3),\\ a_2 &= (4,-1,1,2),\\ a_3 &= (2,0,1,1),\\ a_4 &= (10,-1,4,5),\\ a_5 &= (8,-6,-4,2). \end{aligned}$$

10. За допомогою елементарних перетворень обчислити ранг матриці:

$$a)A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}, \quad b)A = \begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}.$$

11. Знайти всі значення параметра λ при яких матриця

$$a)A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 2 \end{pmatrix}, \quad b)A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

має найменший ранг. Якому числу дорівнює ранг матриці при всіх інших значеннях λ?

12. Визначити, чи лежать в одній площині точки A, B, C, D, якщо

    a) $A(1, 1, -7)$, $B(-3, 2, 1)$, $C(2, -1, 2)$, $D(4, 3, 0)$;

    b) $A(2, 3, 1)$, $B(3, 5, 2)$, $C(0, 1, 3)$, $D(1, 2, 4)$.

13. Визначити взаємне розташування прямих:

    a) $\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{-1}$ і $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$;

    b) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$ і $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{0}$.

14. Використовуючи ранги матриць

$$A = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{pmatrix},$$

знайти умови необхідні і достатні для того, щоб прямі

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{і} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

a) збігалися;b) були мимобіжними; c) були паралельними; d) перетиналися.

15. Використовуючи ранги основної та розширеної матриць систем чотирьох лінійних рівнянь, знайти необхідні та достатні умови того, що прямі

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

a) збігалися;b) були мимобіжними; c) були паралельними; d) перетиналися.

16. Визначити взаємне розташування прямих:

a) $\begin{cases} 2x + 3y - 3z - 2 = 0 \\ 2x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x + y - 4z + 1 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

17. Знайти базис підпростору розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь (фундаментальну систему розв'язків)

$$a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ \end{cases}, \qquad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases},$$

$$c) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}, \qquad d) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases},$$

$$e) \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}, \qquad f) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

18. Знайти розмірність і базис лінійних підпросторів, породжених такими системами векторів:

1)$a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$,
$a_5 = (0, 1, 2, 3)$.

2) $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$,
$a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

19. Знайти базис підпростору, породженого системою векторів. Виразити через базисні вектори вектор b.

$$a) \begin{aligned} a_1 &= (-1, 1, -1, 1), \\ a_2 &= (1, 2, -2, 1), \\ a_3 &= (1, 1, -1, -2), \\ a_4 &= (0, 7, -5, 1), \\ b &= (0, 8, -6, -2). \end{aligned} \qquad b) \begin{aligned} a_1 &= (2, -2, -1, 3), \\ a_2 &= (1, -3, 2, 3), \\ a_3 &= (-1, -2, 3, -1), \\ a_4 &= (1, -9, 7, 4), \\ b &= (1, 2, -3, 1). \end{aligned}$$

Вектори $e_1, e_2, \ldots, e_n$ і x задани своїми координатами в деякому базисі. Довести, що система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є базисом і знайти координати вектора x в цьому базисі.

20. $e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 1, 2),\ e_3 = (1, 2, 3);\ x = (6, 9, 14)$.

21. $e_1 = (2, 1, -3),\ e_2 = (3, 2, -5),\ e_3 = (1, -1, 1);\ x = (6, 2, -7)$.

    Довести, що кожна з двух систем векторів є базисом, і знайти зв'язок між координатами одного і того ж самого вектора в цих двох базисах:

22. $e_1 = (1, 2, 1),\ e_2 = (2, 3, 3),\ e_3 = (3, 7, 1);\ e_1' = (3, 1, 4),\ e_2' = (5, 2, 1),\ e_3' = (1, 1, -6)$.

23. $e_1 = (1, 1, 1),\ e_2 = (1, 2, 1),\ e_3 = (1, 1, 2);\ e_1' = (2, 2, 5),\ e_2' = (1, 0, 3),\ e_3' = (-2, -3, -4)$.

24. Знайти координати многочлена:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

    а) в базисі $1, x, x^2, ..., x^n$;

    б) в базисі $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, ..., (x - \alpha)^n$,вияснивши, що останні многочлени дійсно утворюють базис.

25. Знайти матрицю переходу від базиса $1, x, x^2, ..., x^n$; до базиса $1, x - \alpha, (x - \alpha)^2, ..., (x - \alpha)^n$ простору многочленів степеня, меншого чи рівного n.

26. Чи є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$ множина всіх векторів, координати яких — цілі числа? Якщо є, то знайти базис цього підпростору.

27. Чи є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$ множина всіх векторів, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$? Якщо є, то знайти базис цього підпростору.

28. Чи є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$ множина всіх векторів, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_n = 2$? Якщо є, то знайти базис цього підпростору.

29. Чи є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$ множина всіх векторів, в яких перша і третя координати рівні між собою. Якщо є, то знайти базис цього підпростору.

30. Чи є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$ множина всіх векторів, в яких координати з парними номерами дорівнюють нулю. Якщо є, то знайти базис цього підпростору.

31. Чи є лінійним підпростором в $\mathbb{R}^n$ множина всіх векторів виду $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta ...)$, де α і β — будь-які числа. Якщо є, то знайти базис цього підпростору.

32. Довести, що всі квадратні матриці порядку n з дійсними елементами (чи елементами з будь-якого поля P) утворюють векторний простір над полем дійсних чисел (відповідно над полем P), якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число. Знайти базис і розмірність цього простору.

33. Довести, що всі симетричні матриці утворюють лінійний підпростір простору всіх квадратних матриць порядку n. Знайти базис і розмірність цього підпростору.

34. Довести, що кососиметричні матриці утворюють лінійний підпростір простору всіх квадратних матриць порядку n. Знайти базис і розмірність цього підпростору.

35. Знайти системи лінійних рівнянь, що задають лінійні підпростори, породжені такими системами векторів:

    a) $a_1 = (1, -1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 0, 1),\ a_3 = (2, 0, 1, 1)$.

    b) $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1),\ a_2 = (1, 1, 0, 0, 3),\ a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)$,
    $a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$.

    c) $a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (1, -1, 3),\ a_3 = (2, 1, 4)$.

Знайти розмірність s суми і розмірність d перетину лінійних підпросторів: L_1, породженого векторами $a_1, a_2, \dots, a_k$, L_2, породженого векторами $b_1, b_2, \dots, b_l$.

36. $a_1 = (1, 2, 0, 1),\ a_2 = (1, 1, 1, 0),\ b_1 = (1, 0, 1, 0),\ b_2 = (1, 3, 0, 1)$.

37. $a_1 = (1, 1, 1, 1),\ a_2 = (1, -1, 1, -1),\ a_3 = (1, 3, 1, 3), b_1 = (1, 2, 0, 2)$,
$b_2 = (1, 2, 1, 2),\ b_3 = (3, 1, 3, 1)$.

Знайти базиси суми і перетину лінійних підпросторів, породжених системами векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ і $b_1, b_2, \dots, b_l$:

38. $a_1 = (1, 2, 1),\ a_2 = (1, 1, -1),\ a_3 = (1, 3, 3), b_1 = (2, 3, -1)$,
$b_2 = (1, 2, 2),\ b_3 = (1, 1, -3)$.

39. $a_1 = (1, 2, 1, -2),\ a_2 = (2, 3, 1, 0),\ a_3 = (1, 2, 2, -3), b_1 = (1, 1, 1, 1)$,
$b_2 = (1, 0, 1, -1),\ b_3 = (1, 3, 0, -4)$.

40. Довести, що простір всіх квадратних матриць порядку n є пряма сума лінійних підпросторів L_1 - симетричних і L_2 - кососиметричних матриць. Знайти проекції A_1 і A_2 матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

на L_1 паралельно L_2 і на L_2 паралельно L_1.

41. Довести, що якщо $P = L + x_0$, де L - лінійний підпростір і x_0 - вектор простору $\mathbb{R}^n$, то вектор x_0 належить многовиду P і після заміни цього вектора будь-яким іншим вектором $x \in P$ отримаємо той же таки многовид P.

42. Довести, що для довільного лінійного підпростору L_1, простору $\mathbb{R}^n$ існує другий підпростір L_2 такий, що весь простір $\mathbb{R}^n$ є прямою сумою L_1 та L_2.

43. Довести, що простір $\mathbb{R}^n$ є прямою сумою двох лінійних підпросторів: L_1, заданого рівнянням $x_1 + x_2 + ... + x_n = 0$, та L_2, заданого системою рівнянь $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Знайти проекції одиничних векторів $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,... $e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$ на L_1 паралельно L_2 і на L_2 паралельно L_1.

Розділ 5

Визначники матриць.

5.1 Орієнтовні площі та об'єми.

Нехай V — двовимірний векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, елементи якого ми будемо зображувати направленими відрізками на площині.

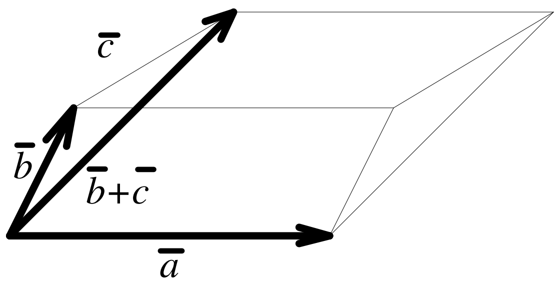
Постановка задачі. Побудувати функцію, яка б отримавши на вхід два вектора $\vec{a}, \vec{b}$ повернула би число, модуль якого дорівнює площі паралелограма побудованого на відрізках $\vec{a}, \vec{b}$. Зауважимо, що тут для мотивації постановки задачі нам досить означення площі зі шкільного курсу геометрії.

Питання: якщо така функція $S : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ існує, то які природні властивості вона повинна мати?

Зрозуміло, що якщо один з векторів (відрізків) розтягнути (стиснути) в λ разів, то площа відповідного паралелограма має збільшитись (зменшитись) в λ разів, Тобто мають виконуватись рівності:

$$S(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda S(\vec{a}, \vec{b}) = S(\vec{a}, \lambda\vec{b}).$$

Крім того, з шкільного курсу геометрії відомо, що площа паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}$ дорівнює сумі площ паралелограмів побудованих на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{a}, \vec{c}$ (див. малюнок.)



Тобто повинні виконуватися рівності:

$$S(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\vec{a}, \vec{c});\ S(\vec{a} + \vec{c}, \vec{b}) = S(\vec{a}, \vec{b}) + S(\vec{c}, \vec{b}).$$

Отже, S має бути білінійною формою (див. 4.0.10) Природно, що якщо наша гіпотетична функція S, отримає на вхід два однакових вектора, то вона має повернути 0. Тобто функція S повинна мати ще й таку властивість: $S(\vec{a}, \vec{a}) = 0$. Але тоді враховуючи білінійність функції S будемо мати:

$$0 = S(\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}) = S(\vec{a}, \vec{a})+S(\vec{a}, \vec{b})+S(\vec{b}, \vec{a})+S(\vec{b}, \vec{b}) = S(\vec{a}, \vec{b})+S(\vec{b}, \vec{a}), \quad (5.1.1)$$

звідки маємо властивість $S(\vec{a}, \vec{b}) = -S(\vec{b}, \vec{a})$, яка називається кососиметричністю. Дамо загальне означення.

Означення 5.1.1. *Нехай $V = V(\mathbb{F})$ — векторний простір довільної скінченної розмірності над довільним полем $\mathbb{F}$. Відображення $S : V \times V \mapsto \mathbb{F}$ називається* **кососиметричним***, якщо має місце тотожність:*

$$\forall u, v \in V \quad S(u, v) = -S(v, u).$$

Нехай на двовимірному векторному просторі $V = V(\mathbb{F})$ задано білінійний кососиметричний функціонал і e_1, e_2 який-небудь базис простору. Для довільних $u, v \in V$, що мають координати $(x_{11}, x_{12}),\ (x_{21}, x_{22})$ в цьому базисі з урахуванням білінійності та кососиметричності будемо мати:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= S(x_{11}e_1 + x_{12}e_2, x_{21}e_1 + x_{22}e_2) = \\ &= x_{11}x_{21}S(e_1, e_1) + x_{11}x_{22}S(e_1, e_2) + x_{12}x_{21}S(e_2, e_1) + x_{22}x_{22}S(e_2, e_2) = \\ &= (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})\, S(e_1, e_2). \quad (5.1.2) \end{aligned}$$

Висновок. Білінійний кососиметричний функціонал на двовимірному просторі однозначно визначається своїм значенням на парі базисних векторів.

Отже, є всі підстави називати білінійний кососиметричний функціонал на двовимірному просторі **орієнтованою площею** паралелограма.

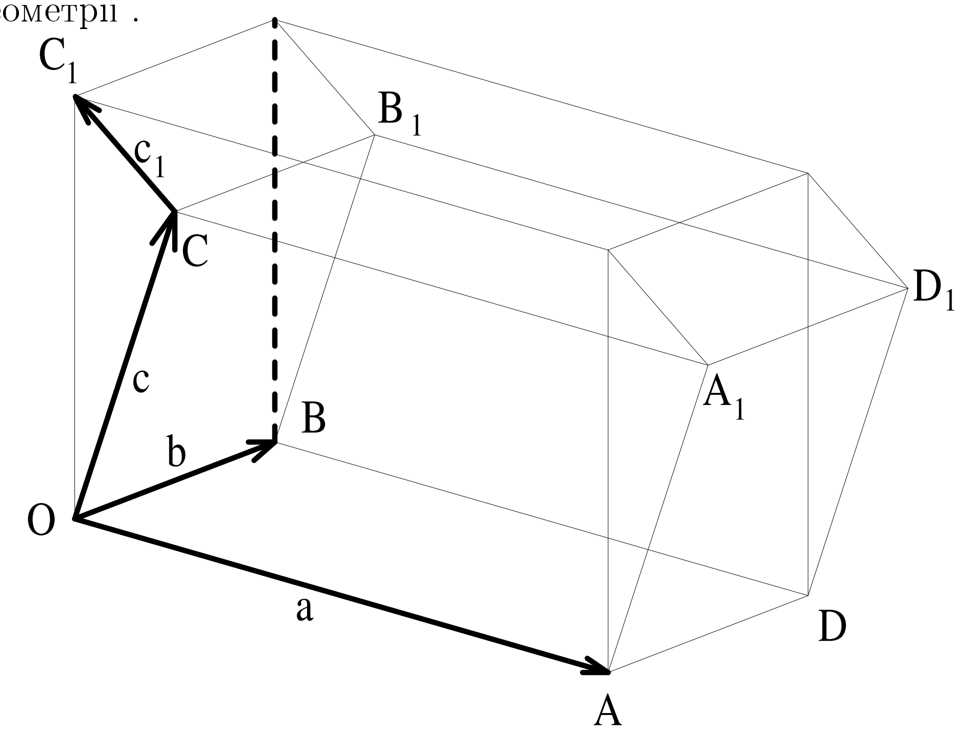
З іншого боку, якщо $\alpha \in \mathbb{F}$ — довільний скаляр, то формула

$$S(u, v) = (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}) \cdot \alpha,$$

де $(x_{11}, x_{12}),\ (x_{21}, x_{22})$ — координати векторів $u, v \in V$ в деякому фіксованому базисі e_1, e_2, визначає білінійний кососиметричний функціонал на двовимірному векторному просторі. Відповідні перевірки пропонуємо зробити самостійно.

Нехай тепер V — тривимірний векторний простір над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, елементи якого будемо зображувати також направленими відрізками, але вже в тривимірному просторі.

Тепер ми хотіли б побудувати функцію, яка б отримавши на вхід три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ повернула би число, модуль якого дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на відрізках $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Тут також користуємося означення об'єму зі шкільного курсу геометрії .



Якщо така функція $\mathcal{V} : V \times V \times V \mapsto \mathbb{R}$ існує, то згадавши шкільний курс стереометрії, приходимо до висновку, що вона повинна мати властивості:

$$\mathcal{V}(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda\mathcal{V}(\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \mathcal{V}(\vec{a}, \lambda\vec{b}, \vec{c})) = \mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{c}));$$
$$\mathcal{V}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \mathcal{V}(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mathcal{V}(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c});$$
$$\mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \vec{c}) = \mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{c}) + \mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}_2, \vec{c}).$$
$$\mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1 + \vec{c}_2) = \mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_1) + \mathcal{V}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_2).$$

Узагальнюючи отримані властивості, приходимо до такого означення.

Означення 5.1.2. *Нехай $V = V(\mathbb{F})$ — векторний простір довільної скінченної розмірності над довільним полем $\mathbb{F}$. Відображення $\mathcal{V} : V \times V \times V \mapsto \mathbb{F}$ називається* **три-лінійним функціоналом** *визначеному на просторі V, якщо мають місце тотожності:*

$$\forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F},\ \ \forall u_1,u_2,v,w \in V\ \ \mathcal{V}(\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2,v,w) = \lambda_1\mathcal{V}(u_1,v,w)+\lambda_2\mathcal{V}(u_2,v,w);$$

$$\forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F},\ \ \forall u,v_1,v_2,w \in V\ \ \mathcal{V}(u,\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2,w) = \lambda_1\mathcal{V}(u,v_1,w)+\lambda_2\mathcal{V}(u,v_2,w);$$

$$\forall\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{F},\ \ \forall u,v,w_1,w_2 \in V\ \ \mathcal{V}(u,v,\lambda_1 w_1+\lambda_2 w_2) = \lambda_1\mathcal{V}(u,v,w_1)+\lambda_2\mathcal{V}(u,v,w_2).$$

Оскільки, об'єм плоскої фігури дорівнює нулю, то маємо

$$\mathcal{V}(\vec{a},\vec{a},\vec{c}) = \mathcal{V}(\vec{a},\vec{b},\vec{b}) = \mathcal{V}(\vec{a},\vec{b},\vec{a}) = 0.$$

Дослівно повторивши обчислення (5.1.1), отримаємо, що при фіксованому одному аргументі, функція $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ є кососиметричною по двом іншим аргументам.

Якщо на тривимірному векторному просторі $V = V(\mathbb{F})$ задано три-лінійний кососиметричний функціонал і e_1, e_2, e_3 який-небудь базис простору, то для довільних $u, v, w \in V$, що мають координати $(x_{11}, x_{12}, x_{13}),\ (x_{21}, x_{22}, x_{23}),\ (x_{31}, x_{32}, x_{33})$ в цьому базисі з урахуванням три-лінійності та кососиметричності будемо мати:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u,v,w) &= \mathcal{V}(x_{11}e_1+x_{12}e_2+x_{13}e_3, x_{21}e_1+x_{22}e_2+x_{23}e_3, x_{31}e_1+x_{32}e_2+x_{33}e_3) = \\ &= x_{11}x_{22}x_{33}\mathcal{V}(e_1,e_2,e_3) + x_{12}x_{23}x_{31}\mathcal{V}(e_2,e_3,e_1) + x_{13}x_{21}x_{32}\mathcal{V}(e_3,e_1,e_2) + \\ &\quad + x_{11}x_{23}x_{32}\mathcal{V}(e_1,e_3,e_2) + x_{12}x_{21}x_{33}\mathcal{V}(e_2,e_1,e_3) + x_{13}x_{22}x_{31}\mathcal{V}(e_3,e_2,e_1).\end{aligned}$$

Звернемо увагу на те, що ми отримали в правій частині шість доданків, які відповідають всім можливим перестановкам трьох базисних векторів. Виконуючи попарні перестановки базисних векторів із зміною знаку функції $\mathcal{V}$ отримаємо:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u,v,w) &= \mathcal{V}(x_{11}e_1+x_{12}e_2+x_{13}e_3, x_{21}e_1+x_{22}e_2+x_{23}e_3, x_{31}e_1+x_{32}e_2+x_{33}e_3) = \\ &= (x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31})\,\mathcal{V}(e_1,e_2,e_3).\end{aligned}$$

Побудований таким чином функціонал називають **орієнтованим об'ємом** паралелепіпеда або **мішаним добутком** векторів u, v, w. Якщо піти дещо іншим шляхом, то можна отримати потрібну формулу в іншому вигляді:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u,v,w) &= \mathcal{V}(x_{11}e_1+x_{12}e_2+x_{13}e_3, x_{21}e_1+x_{22}e_2+x_{23}e_3, x_{31}e_1+x_{32}e_2+x_{33}e_3) = \\ &= x_{11}\mathcal{V}(e_1, x_{22}e_2 + x_{23}e_3, x_{32}e_2 + x_{33}e_3) + x_{12}\mathcal{V}(e_2, x_{21}e_1 + x_{23}e_3, x_{31}e_1 + x_{33}e_3) + \\ &\quad + x_{13}\mathcal{V}(e_3, x_{21}e_1 + x_{22}e_2, x_{31}e_1 + x_{32}e_2).\end{aligned}$$

Якщо зафіксувати перший аргумент функції $\mathcal{V}$ в отриманих трьох доданках, то їх можна розглядати як білінійні кососиметричні функціонали на трьох двовимірних векторних просторах породженому векторами $(e_2, e_3), (e_1, e_3), (e_1, e_2)$ відповідно і скористатися отриманою раніше формулою 5.1.2:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u, v, w) &= x_{11}\left(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}\right)\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3) + \\ &+ x_{12}\left(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}\right)\mathcal{V}(e_2, e_1, e_3) + x_{13}\left(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}\right)\mathcal{V}(e_3, e_1, e_2) = \\ &= \left[x_{11}\left(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}\right) - x_{12}\left(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}\right) + x_{13}\left(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}\right)\right]\mathcal{V}(e_1, e_2, e_3)\end{aligned}$$

Це так звана формула розкладу по координатах першого вектора. Але в обох формулах ми отримуємо, що три-лінійний кососиметричний функціонал на тривимірному просторі однозначно визначається заданням його значення на довільному базисі. З іншого боку, для довільного $\alpha \in \mathbb{F}$, формула

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(u, v, w) &= \\ &= \left(x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32} - x_{11}x_{23}x_{32} - x_{12}x_{21}x_{33} - x_{13}x_{22}x_{31}\right)\alpha\end{aligned}$$

визначає дію три-лінійного кососиметричного функціоналу на трійках векторів, що в певному базисі e_1, e_2, e_3 мають координати (x_{11}, x_{12}, x_{13}), (x_{21}, x_{22}, x_{23}), (x_{31}, x_{32}, x_{33}) відповідно. Перевірки три-лінійності та кососиметричності так визначеного функціоналу пропонуємо зробити в якості вправи.

Означення дані для функціоналів можна дослівно повторити для відображень $V \times V \to V$ у векторний простір і отримати означення їх білінійності та кососиметричності. Нехай e_1, e_2, e_3- який-небудь базис тривимірного простору. Побудуємо вказане відображення $V \times V \ni (u, v) \to [u, v] \in V$ визначивши його спочатку на базисних елементах. Покладемо

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_1] = e_2.$$

Якщо вектори u та v в цьому базисі мають координати $(x_{11}, x_{12}, x_{13}), (x_{21}, x_{22}, x_{23})$, то аналогічно до (5.1.2) будемо мати

$$\begin{aligned}[u, v] &= (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})[e_1, e_2] + (x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22})[e_2, e_3] + (x_{11}x_{23} - x_{13}x_{21})[e_1, e_3] = \\ &= (x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})e_3 + (x_{12}x_{23} - x_{13}x_{22})e_1 + (x_{13}x_{21} - x_{11}x_{23})e_2.\end{aligned}$$

Побудоване білінійне кососиметричне відображення називається **векторним добутком** відносно базису e_1, e_2, e_3.

Вправа 5.1.1. *Користуючись методами шкільної векторної алгебри, доведіть, що якщо $e_1 = \vec{i}, e_2 = \vec{j}, e_3 = \vec{k}-$ декартова система координат простору, то вектор $[u, v]$ ортогональний до обох векторів u, v, а його довжина дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.*

5.2 Полілінійні кососиметричні функціонали.

Настав час дати загальні означення для просторів довільної розмірності.

Означення 5.2.1. *Нехай $V = V(\mathbb{F})$ — векторний простір довільної скінченної розмірності над довільним полем $\mathbb{F}$. Відображення $D : \underbrace{V \times V \times V \times \ldots \times V}_{n} \mapsto \mathbb{F}$ називається* **полілінійним функціоналом** *або* **n-лінійним функціоналом** *визначеним на просторі V, якщо воно є лінійним по кожному аргументу, тобто*

$$\begin{gathered} \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F}, \quad \forall v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n \in V \\ D(v_1, \ldots, v_{i-1}, \lambda_1 v_i' + \lambda_2 v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_m) = \\ = \lambda_1 D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_n) + \lambda_2 D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i'', v_{i+1}, \ldots, v_n), \end{gathered}$$

$i = 1, 2, \ldots n$.

Означення 5.2.2. *Відображення $D : \underbrace{V \times V \times V \times \ldots \times V}_{n} \mapsto \mathbb{F}$ називається кососиметричним, якщо воно є таким по будь-яким двом аргументам при фіксованих значеннях решти.*

Властивості n-лінійних кососиметричних функціоналів на $n-$ вимірних просторах.

1. $D(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = D(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$. Довести самостійно.
2. Якщо вектори $v_1, v_2, \ldots, v_n$ є лінійно залежними, то $D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$. Довести самостійно.
3. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис який-небудь базис векторного простору і

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j.$$

Тоді має місце формула:

$$D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = D(e_1, e_2, \ldots, e_n) \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} (-1)^{\chi(i_1, i_2, \ldots i_n)} x_{1i_1} x_{2i_2} \ldots x_{ni_n} \quad (5.2.3)$$

Дійсно, використовуючи полілінійність та кососиметричність будемо мати

$$D(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n)} x_{1i_1} x_{2i_2} \ldots x_{ni_n} D(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}).$$

Тут сумування ведеться по всім перестановкам $(i_1, i_2, \dots i_n)$. Позначимо через $\chi(i_1, i_2, \dots, i_n)$ число перестановок пар символів, які треба виконати щоб впорядкувати масив $(i_1, i_2, \dots i_n)$ в зростаючому порядку, тобто отримати $(1, 2, \dots, n)$. Тепер отриману формулу можна переписати вигляді (5.2.3).

4. Для довільного $\alpha \in \mathbb{F}$ формула

$$D(v_1, v_2, \dots, v_n) = \alpha \cdot \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\chi(i_1, i_2, \dots i_n)} x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{ni_n}$$

визначає дію n-лінійного кососиметричного функціоналу на наборах векторів $v_i, i = 1, 2, \dots, n$, що в певному базисі $e_1, e_2, \dots e_n$ мають координати $(x_{i_1}$, x_{i_2}, …, $x_{i_n})$. Перевірки полілінійності та кососиметричності так визначеного функціоналу знову залишаємо в якості вправи.

5. Значення n-лінійного кососиметричного функціоналу, який не є тотожним нулем на довільній сукупності лінійно незалежних векторів не є нульовим.

Дійсно, сукупність з n таких векторів можна прийняти за базис. Якби нашого функціоналу на цьому базисі дорівнювало нулю, то з формули (5.2.3) зразу б випливало, що цей функціонал є тотожний нуль.

Означення 5.2.3. *Визначником (детермінантом) називається $n-$ лінійний кососиметричний функціонал заданий на арифметичному векторному просторі, який на елементах канонічного базису приймає значення $1 \in \mathbb{F}$.*

Визначником квадратної матриці розмірності n називається число з поля $\mathbb{F}$, яке є значенням визначника на векторах-рядках цієї матриці.

Як випливає з формули (5.2.3), умова одиничного значення функціоналу на базисі робить означення коректним і для матриці $X = (x_{i,j}), i, j = 1, 2, \dots n$ маємо формулу:

$$Det(X) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} (-1)^{\chi(i_1, i_2, \dots i_n)} x_{1i_1} x_{2i_2} \dots x_{ni_n} \tag{5.2.4}$$

При цьому для довільного n — лінійного кососиметричного функціоналу D визначеному на арифметичному $\mathbb{F}^n$ і довільного базису цього простору $e_1, e_2, \dots, e_n$ має місце формула

$$D(v_1, v_2, \dots, v_n) = Det(v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot D(e_1, e_2, \dots, e_n). \tag{5.2.5}$$

З формули (5.2.4) Негайно випливає, що якщо матриця X є трикутною, тобто $x_{ij} = 0$ при $i > j$, (нижня трикутна) або $x_{ij} = 0$ при $i < j$ (верхня трикутна), то її визначник $Det(X)$ дорівнює добутку діагональних елементів. На цьому грунтується один з методів обчислення визначників матриць. Адже згідно властивості 1, додавання до рядка іншого, помноженого на скаляр не змінює значення визначника , крім того множення рядка на скаляр приводить до множення значення визначника на це ж число, а перестановка довільних двох рядків просто змінює знак на протилежний. Вказаними перетвореннями довільну квадратну матрицю можна звести до трикутного вигляду і після цього легко обчислити її визначник.

Лема 5.2.1.

$$Det(X) = Det(X^T).$$

Доведення. Розглянемо вираз $(-1)^{\chi(i_1,i_2,\dots i_n)}x_{1i_1}x_{2i_2}\dots x_{ni_n}$, який є одним з доданків формули (5.2.4). Як уже згадувалось, набір натуральних чисел $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ є перестановкою чисел $1, 2, \dots, n$, і нехай в цій перестановці число 1 стоїть на позиції j_1, 2 на позиції j_2, 3 на позиції J_3 $\dots$ n на позиції j_n. Числа $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ теж очевидно утворюють перестановку чисел $1, 2, \dots, n$ зворотну до початкової перестановки. Переставимо співмножники в добутку і перепишемо його в такому вигляді $x_{j_11}x_{j_22}\dots x_{j_nn}$. Перший співмножник є елементом першого рядка транспонованої матриці, другий — другого і так далі. Крім того зауважимо, що виконуючи попарні перестановки з масивами $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ можна ті самі перестановки виконувати з масивом $(1, 2, \dots, n)$ і при цьому ми отримаємо масиви $(1, 2, \dots, n)$ та $(j_1, j_2, \dots, j_n)$.

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$$

Звідси випливає, що $\chi(i_1, i_2, \dots, i_n) = \chi(j_1, j_2, \dots, j_n)$, а отже маємо рівність

$$(-1)^{\chi(i_1,i_2,\dots i_n)}x_{1i_1}x_{2i_2}\dots x_{ni_n} = (-1)^{\chi(j_1,j_2,\dots,j_n)}x_{j_11}x_{j_22}\dots x_{j_nn},$$

а тому маємо рівність визначників. □

Це означає що для зведення до трикутного виду можна використовувати і елементарні перетворення над стовпчиками.

Іншим методом обчислення детермінанта квадратної матриці розмірності n є розклад по рядку або стовпчику, який зводить задачу до обчислення n визначників матриць розмірності $n-1$.

Означення 5.2.4. *Нехай $X = (x_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ — квадратна матриця, тоді детермінант матриці, яка залишилась після викреслювання i-го рядка та j-го стовпчика з матриці X називається доповнюючим мінором і позначається M_{ij}*

Теорема 5.2.1. *Мають місце формули:*

$$DetX = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad i = 1, 2, \dots, n; \tag{5.2.6}$$

$$DetX = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2.7}$$

Доведення. Доведемо формулу (5.2.6) при $i = 1$. Використовуючи лінійність по першому аргументу маємо:

$$Det(X) = Det\left(\sum_{i=1}^{n} x_{1i}\epsilon_i, \sum_{j=1}^{n} x_{2j}\epsilon_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_{nj}\epsilon_j\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} Det\left(\epsilon_i, \sum_{j=1}^{n} x_{2j}\epsilon_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} x_{nj}\epsilon_j\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_{1i} Det\left(\epsilon_i, \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} x_{2j}\epsilon_j, \ldots, \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} x_{nj}\epsilon_j\right).$$

Тут внаслідок кососиметричності і полілінійності функціоналу Det в сумах що входять в $Det\,(\epsilon_i, \ldots)$, доданки що з номерами $j = i$ будуть давати нульовий внесок. Тоді для кожного фіксованого i $\quad Det\,(\epsilon_i, \ldots)$ можна розглядати як $n - 1-$ лінійний кососиметричний функціонал на підпросторі $L =< \epsilon, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n >$ — породженому вказаними векторами канонічного базису. За формулою (5.2.5) маємо

$$Det\left(\epsilon_i, \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} x_{2j}\epsilon_j, \ldots, \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} x_{nj}\epsilon_j\right) =$$
$$= Det\left(\sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} x_{2j}\epsilon_j, \ldots, \sum_{j=1 (j\neq i)}^{n} x_{nj}\epsilon_j\right) \cdot Det\,(\epsilon_i, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n)\,.$$

Легко бачити, що перший співмножник збігається з доповнюючим мінором M_{1i}. Враховуючи, що

$$Det\,(e_i, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n) =$$
$$= (-1)^{i-1} \cdot Det\,(\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n) = (-1)^{i+1},$$

отримуємо формулу (5.2.6) розкладу детермінанта по першому рядку. Скористаємося отриманою формулою для $Det\,(v_k, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n)$, де v_i — вектор-рядки матриці X. Враховуючи, що

$$Det\,(v_k, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots v_n) = (-1)^{k-1} \cdot Det(X)$$

отримуємо розклад (5.2.6) по довільному $k-$ му рядку. Формули (5.2.7) випливають з раніше доведеного результату про рівність детермінантів матриці та транспонованої до неї. □

Теорема 5.2.2. *Для довільних квадратних матриць A, B однакової розмірності має місце формула*

$$Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B).$$

Доведення. Зафіксуємо значення матричних елементів матриці B і розглянемо функціонал:

$$D_B(A) = Det(A \cdot B),$$

який приймаючи n рядків матриці A повертає значення з поля $\mathbb{F}$, яке обчислюється за формулою, що стоїть у правій частині рівності. Легко переконатися, що $D_B(A)$ є кососиметричним і n — лінійним функціоналом. Дійсно, перестановка рядків матриці A приведе до перестановки тих же рядків в матриці $A \cdot B$ і значення детермінанта змінить знак на протилежний. Якщо ж який-небудь рядок матриці A подано як лінійну комбінацію двох яких-небудь векторів-рядків, то рядок з тим же номером в матриці $A \cdot B$ буде лінійною комбінацією відповідних вектор-рядків з тими самими коефіцієнтами і $n-$ лінійність випливає з властивості полілінійності функціоналу Det.

Застосуємо формулу (5.2.5) до n-лінійного кососиметричного функціоналу $D_B(A)$.

$$D_B(A) = Det(A) \cdot D_B(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n).$$

Приймаючи до уваги, що

$$D_B(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = Det(E \cdot B) = Det(B),$$

де E — одинична матриця, завершуємо доведення теореми. □

5.3 Використання визначників для обертання матриць та знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь.

Означення 5.3.1. *Число $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ називають алгебраїчними доповненням матричного елемента x_{ij}. Матриця у якої на перетині $i-$ го рядка та $j-$ го стовпчика знаходиться алгебраїчне доповнення матричного елемента x_{ji} (зверніть увагу на перестановку індексів) називається приєднаною матрицею матриці X і позначається X^*.*

Теорема 5.3.1. *Має місце формула*

$$X \cdot X^* = Det(X) \cdot E. \tag{5.3.8}$$

Доведення. Обчислимо матричний $(i, k)-$ й елемент матриці $X \cdot X^*$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} x^*_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot (-1)^{k+j} \cdot M_{kj}.$$

Скористаємося тепер формулою (5.2.6). Якщо $i \neq k$, то отримана формула є розклад по $i-$ му рядку детермінанта матриці, яка утворена з матриці X заміною $k-$ го рядка на i — й. Оскільки у такої матриці будуть два однакові рядка, то цей детермінант дорівнює нулю. При $i = k$ отримуємо просто формулу (5.2.6). Отже, маємо формулу

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot (-1)^{k+j} \cdot M_{kj} = \delta_{ik} Det(X)$$

(δ_{ik} - символ Кронекера), звідки і випливає потрібна формула. □

Наслідок 5.3.1. *Матриця X є оборотною тоді і тільки тоді, коли $Det(X) \neq 0$ при цьому має місце формула:*

$$X^{-1} = \frac{1}{Det(X)} \cdot X^{*}. \tag{5.3.9}$$

Формули Крамера.

Використаємо знайдену формулу для оберненої матриці для знаходження явного виду розв'язку системи лінійних рівнянь

$$A \cdot x = b,$$

де A — оборотна квадратна матриця розмірності n, а b — вектор-стовпчик тієї ж розмірності. Помноживши обидві частини рівності на обернену матрицю A^{-1} зліва, ми отримаємо еквівалентну систему:

$$x = A^{-1} \cdot b,$$

звідки за формулою (5.3.9) маємо

$$x = \frac{1}{Det(A)} \cdot A^{*} \cdot b.$$

Обчислимо $k-$ ту координату вектора x :

$$x_k = \frac{1}{Det(A)} \cdot \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} M_{ik} \cdot b_i.$$

Тут M_{ik} доповнюючий мінор матриці A. Порівнюючи з формулою (5.2.7) розкладу по стовпчику детермінанта, приходимо до висновку, що сума в правій частині є нічим іншим як детермінантом матриці, яка отримана з матриці A заміною її $k-$ го стовпчика на вектор-стовпчик b. Позначивши вказаний детермінант через D_k отримуємо формулу Крамера

$$x_k = \frac{D_k}{Det(A)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.3.10}$$

5.4 Задачі

Обчислити визначники:

1.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \qquad b)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad c)\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

2.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \qquad b)\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \qquad c)\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. Обчислити визначники:

$$a)\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & -\frac{21}{5} & 15 \\ \frac{2}{3} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix};$$

$$b)\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}; \quad c)\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}.$$

4. Обчислити визначники порядку n:

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ . & . & \dots & . \\ 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}; b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; c)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}.$$

5. Обчислити визначник порядку $n+1$:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}, \qquad b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

6. Обчислити визначники порядку n:

$$a) \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}; c) \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\cdot\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}; \qquad e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix};$$

$$f) \begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ . & . & . & \dots & . \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}; \qquad g) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x & x & \dots & x \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Обчислити визначники :

$$a) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a' & 1 & 0 & 0 \\ b' & 0 & 1 & 0 \\ c' & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad b) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

8. Розв'язати методом Крамера

$$a) \begin{cases} 2x_1+ & 2x_2- & x_3+ & x_4 = & 4 \\ 4x_1+ & 3x_2- & x_3+ & 2x_4 = & 6 \\ 8x_1+ & 5x_2- & 3x_3+ & 4x_4 = & 12 \\ 3x_1+ & 3x_2- & 2x_3+ & 2x_4 = & 6 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x_1+ & 3x_2+ & 11x_3+ & 5x_4 = & 2 \\ x_1+ & x_2+ & 5x_3+ & 2x_4 = & 1 \\ 2x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & 2x_4 = & -3 \\ x_1+ & x_2+ & 3x_3+ & 4x_4 = & -3 \end{cases}$$

9. Обчислити визначники :

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}; \quad b)\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix};$$

$$c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \dots & x_n^2+x_n \\ . & . & . & \dots & . \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix};$$

$$d)\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & 1+x_1^3 & \dots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & 1+x_2^3 & \dots & 1+x_2^n \\ 1+x_3 & 1+x_3^2 & 1+x_3^3 & \dots & 1+x_3^n \\ . & . & . & \dots & . \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & 1+x_n^3 & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

10. Вектори і утворюють кут $\phi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|a| = 6$, $|b| = 5$, обчислити $|[ab]|$.

11. Дано три вектори : $a = (1, -1, 3)$, $b = (-2, 2, 1)$, $c = (3, -2, 5)$. Визначити, чи будуть компланарними ці вектори. Обчислити abc.

12. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого розміщені в точках

    a) $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ і $D(4; 1; 3)$;

    b) $A(4; 2; 1)$, $B(-3; -3; -1)$, $C(2; 1; 2)$ і $D(5; -2; -1)$.

13. Знайти довжину висоти тетраедра з вершинами $A(1, 1, -3)$, $B(4, 2, 1)$, $C(3, -1, 5)$ та $D(3, 3, 7)$, опущеної з вершини D.

14. Знайти довжину висоти тетраедра з вершинами $A(-1, 0, -3)$, $B(2, 2, 1)$, $C(4, -1, 2)$ та $D(3, 3, -4)$, опущеної з вершини C.

15. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(1, 2, 2)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, -1, 2)$.

16. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(2, 0, 4)$, $B(-2, 2, 1)$, $C(3, -1, -2)$.

Розділ 6

Білінійні симетричні та квадратичні форми

6.1 Матриці білінійних форм

Як ми бачили раніше, білінійний функціонал повністю визначається своїми значеннями на базисних елементах: $F(e_i, e_j) = a_{ij} \in \mathbb{F}$. Дійсно, адже для векторів $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ будемо мати

$$F(v, w) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}.$$

Розглянемо праву частину отриманого виразу як поліном від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. При цьому ми бачимо що кожен доданок має степінь 1 по змінним x_i і по змінним y_j, а повний степінь дорівнює 2.

Означення 6.1.1. *Поліном виду*

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}, \tag{6.1.1}$$

який є однорідним степеня 1 окремо по змінним x_i та окремо по змінним y_j і має степінь однорідності 2 по всім змінним, називається **білінійною формою** *від вказаних змінних, а однорідний поліном степеня 2 по змінним x_j*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j b_{ij}, \tag{6.1.2}$$

називається **квадратичною формою** *вказаних змінних.*

Матриці коефіцієнтів $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ називаються матрицями білінійної та квадратичної форм відповідно.

Будь-якій білінійній формі можна поставити у відповідність квадратичну форму:

$$Q(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x}). \tag{6.1.3}$$

З іншого боку, для білінійної форми маємо:

$$S(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + S(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + S(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Якщо білінійний функціонал є симетричним $F(v, w) = F(w, v)$, то і відповідна білінійна форма є симетричною: $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, що еквівалентно умовам $a_{ij} = a_{ji}$. Для таких форм будемо мати:

$$S(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + S(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + 2S(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Якщо $1 + 1 \neq 0$ в полі $\mathbb{F}$, то покладемо $Q(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ і отримаємо

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(Q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}) - Q(\mathbf{y})\right).$$

Отже, симетрична білінійна форма однозначно відновлюється по своїй квадратичній формі.

Білінійні форми (не обов'язково симетричні) зручно подавати у матричній формі:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}, \tag{6.1.4}$$

де $\mathbf{x}, \mathbf{y}-$ вектор-стовпчики змінних, а $A = (a_{ij})-$ матриця. Якщо ж S є симетричною, то матриця A є симетричною і для відповідної квадратичної форми будемо мати

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}. \tag{6.1.5}$$

Якщо замінити базис векторного простору на $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, то як ми пам'ятаємо зв'язок між координатами здійснюється за допомогою матриці переходу: $\mathbf{x} = C\mathbf{x}', \mathbf{y} = C\mathbf{y}'$. Для білінійної форми будемо мати:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y} = (C \cdot \mathbf{x}')^T A \cdot C \cdot \mathbf{y}' = \mathbf{x}'^T \left(C^T A C\right) \mathbf{y}',$$

Отже, матриці білінійних форм, отримані одна з іншої заміною базису, пов'язані між собою наступним чином

$$A' = C^T \cdot A \cdot C \tag{6.1.6}$$

Означення 6.1.2. *Білінійні та квадратичні форми, матриці яких пов'язані співвідношенням* (6.1.6)*, називаються* **еквівалентними** .

Іншими словами еквівалентні білінійні форми визначають одни і той же білінійний функціонал на векторному просторі.

Вправа Довести, що ранги матриць еквівалентних форм збігаються.

Означення 6.1.3. *Попереднє твердження дозволяє ввести поняття* **рангу** *білінійного не обов'язково симетричного функціоналу. Зробіть це самостійно.*

6.2 Зведення білінійних симетричних форм до діагонального вигляду

Теорема 6.2.1. *Для довільного білінійного симетричного функціоналу, визначеного на векторному просторі, існує базис в якому цей функціонал задається білінійною формою, що має діагональний вигляд:*

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i, \tag{6.2.7}$$

$a_i \in \mathbb{R}$. *В цьому базисі відповідна квадратична форма набуває вигляду:*

$$Q(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2. \tag{6.2.8}$$

Іншими словами будь-яка симетрична білінійна (квадратична) форма еквівалентна діагональній формі (6.2.7) *(*(6.2.8)*).*

Доведення. Нехай в деякому базисі білінійна симетрична форма має вид (6.1.1), тоді за формулою (6.1.3) маємо

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2 a_{ij} x_i x_j. \tag{6.2.9}$$

Доведення проведемо методом математичної індукції по n. При $n = 1$ твердження очевидне. Припустимо, що один з коефіцієнтів a_{ii} відмінний від нуля. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $a_{11} \neq 0$. Тоді квадратичну форму можна подати у такому вигляді

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n)$$

Перейдемо до іншого базису, в якому координати x_i' пов'язані зі старими координатами наступним чином

$$x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \; x_i' = x_i, \; i > 1.$$

Легко бачити, що матриця переходу від нових координат до старих $x' \to x$ є оборотною, а отже дійсно є матрицею переходу до іншого базису. В ньому квадратична форма набуде вигляду

$$Q(x_1', \ldots, x_n') = a_{11} x_1'^2 + Q_1(x_2', \ldots, x_n'),$$

де $Q_1(x_2', \ldots, x_n')-$ квадратична форма від меншої кількості змінних, а отже можна застосувати припущення індукції. В побудованому базисі відповідна білінійна симетрична форма буде очевидно мати також діагональний вигляд.

Якщо ж $\forall i\ a_{ii} = 0$, то знайдемо пару $(i, j) : a_{i,j} \neq 0$. Новий базис оберемо таким чином, щоб нові і старі координати були пов'язані формулами $x_i = x'_i - x'_j, x_j = x'_i + x'_j, x_k = x'_k, k \neq i, j$. В цьому базисі квадратична форма (6.2.9) набуде вигляду

$$Q(\mathbf{x}', \mathbf{x}') = 2a_{i,j}(x_i'^2 - x_j'^2) + Q_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}')$$

і вона містить доданки з квадратами змінних. Цим задача до розглянутого вище випадку. Очевидно, що у побудованому базисі відповідна білінійна симетрична форма також набуде діагонального вигляду. □

Наслідок 6.2.1. *Будь-яка квадратична форма над полем комплексних чисел еквівалентна формі* $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2$.

Описаний вище метод зведення квадратичної форми до діагонального вигляду називають методои Лагранжа.

Опишемо інший метод (метод Якобі), який пов'язаний з прямою побудовою потрібного базису. Для його застосування необхідно виконання додаткових умов: головні мінори матриці $A = (a_{i,j})\ \ (a_{ij} = F(e_i, e_j))$ білінійної форми мають бути відмінні від нуля, тобто $\Delta_1 = a_{11} \neq 0$,

$$\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0, \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0, \ldots, \Delta_n = \det(A) \neq 0.$$

Будемо шукати потрібний базис у вигляді

$$e'_i = \sum_{j=1}^{i} c_{ij} e_j.$$

Невизначені коефіцієнти знайдемо з умов

$$F(e'_i, e'_j) = 0, \quad i \neq j. \tag{6.2.10}$$

Ці умови будуть очевидно виконані, якщо будуть мати місце такі рівності

$$F(e'_k, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2.11}$$

Оскільки елементи потрібного базису визначаються з точністю до сталого множника, то для визначеності додамо ще умови $F(e'_k, e_k) = 1, k = 1, 2, \ldots, n$. З цих умов та (6.2.11), отримуємо для кожного k систему лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів c_{ij} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{k} c_{kj} F(e_j, e_i) = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \sum_{j=1}^{k} c_{kj} F(e_j, e_k) = 1 \end{array} \right. , \tag{6.2.12}$$

визначник якої збігається з Δ_k, а отже відмінний від нуля. Таким чином, наведені системи лінійних рівнянь однозначно визначають базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ з потрібними властивостями. Для $k = 1, 2, \ldots, n$ за формулами Крамера отримуємо

$$c_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}.$$

Враховуючи, що для елементів побудованого базису виконуються умови (6.2.10), отримуємо діагональний вигляд квадратичної форми в цьому базисі:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_1'^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2. \tag{6.2.13}$$

6.3 Закон інерції квадратичних форм

Теорема 6.3.1 (Закон інерції квадратичних форм над полем дійсних чисел)**.** *Кількості додатних та від'ємних коефіцієнтів в діагональному вигляді еквівалентних квадратичних форм збігаються.*

Доведення. Очевидно, що досить розглядати діагональні вигляди з коефіцієнтами ± 1. Припустимо, що еквівалентні квадратичні форми мають діагональні форми:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2 = x_1'^2 + \ldots + x_{r'}'^2 - x_{r"+1}'^2 - \ldots - x_{r'+s'}'^2 \tag{6.3.14}$$

в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$; $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Розглянемо підпростір U породжений векторами $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{r'}$. Для будь-якого $u \in U$ будемо мати $F(u, u) > 0$. Для векторів підпростору W, породженому векторами $e_{r+1}, e_{r+2}, \ldots, e_{r+s}, \ldots, e_n$. будемо мати $F(w, w) < 0$. Якщо $r' > r$, то будемо мати $\dim U + \dim W = r' + n - r > n$, а отже, згідно формули (4.1.12), $U \cap W \neq (0)$. Для вектора $u \in U \cap W$ отримуємо суперечність $F(u, u) > 0$ і одночасно $F(u, u) < 0$. Отримана суперечність доводить, що $r = r'$.

Для отримання рівності $s = s'$ слід провести ті самі міркування для $-F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. □

Означення 6.3.1. *Білініний симетричний функціонал $F(u, v)$ визначений на дійсному векторному просторі називається додатно визначеним, якщо $\forall u \neq 0$ має місце $F(u, u) > 0$.*

Теорема 6.3.2. *Білініний симетричний функціонал $F(u, v)$ є додатно визначеним тоді і тільки тоді для елементів його матриці в деякому базисі виконуються нерівності:*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_n > 0. \tag{6.3.15}$$

Доведення. Критерій є прямим наслідком методу Якобі, та закону інерції квадратичних форм. □

6.4 Задачі

1. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду методом Лагранжа:

   a) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$;

   b) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

   c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;

   d) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

2. Звести квадратичну форму до канонічного вигляду:

   a) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

   b) $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2x_3$;

   c) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;

3. Чи еквівалентні такі квадратичні форми?

   a) $x_1^2 - x_2x_3 \qquad y_1y_2 - 3y_3^2$;

   b) $x_1^2 + x_2x_3 \qquad y_1y_2 + y_3^2$;

   c) $-4x_1x_2 \qquad y_1^2 - 8y_1y_2 + 2y_2^2$;

   d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 \qquad -4y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - 4y_1y_2 + 4y_1y_3 + 18y_2y_3$.

4. Знайти всі значення параметра λ, при яких квадратичні форми будуть додатно визначені.

   a) $2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$;

   b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

5. Довести, що квадратична форма f тоді і тільки тоді додатно визначена, якщо матрицю цієї квадратичної форми можна представити у вигляді добутку двох матриць $A = CC^T$, де C невироджена матриця, а C^T — транспонована до неї.

Розділ 7

Евклідові та унітарні векторні простори

7.1 Нерівність Коші-Буняковського

В цьому розділі ми будемо розглядати векторні простори лише над полями дійсних та комплексних чисел.

Означення 7.1.1. *Векторний простір $V = V(\mathbb{R})$ називається* **евклідовим**, *якщо на ньому визначено білінійний, симетричний, додатно-визначений функціонал, який називається* **скалярним добутком**.

Тобто скалярний добуток це відображення:

$$V \times V \mapsto \mathbb{R}, \tag{7.1.1}$$

яке отримавши на вхід пару векторів v_1, v_2 повертає скаляр $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$, при цьому виконуються умови

1. білінійності
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;\; \forall u, v, w \in V \quad (\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w),$$
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \;\; \forall u, v, w \in V \quad (u, \lambda v + \mu w) = \lambda(u, v) + \mu(u, w);$$
2. симетричності
$$\forall v, w \in V \quad (v, w) = (w, v).$$
3. додатної визначеності:
$$\forall v \in V, \;\; v \neq 0 \;\Rightarrow\; (v, v) > 0.$$

Приклад 7.1.1. *Для арифметичного векторного простору $V = \mathbb{R}^n$ введемо скалярний добуток двох рядків $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ наступним чином:*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=i}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Самостійно перевірте, що всі умови 1–3 виконуються.

Приклад 7.1.2. *Для простору всіх неперервних функцій на відрізку $C([a,b])$ введемо скалярний добуток двох функцій f і g таким чином:*

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Самостійно перевірте, що введена таким чином білінійна функція є скалярним добутком.

Для векторних просторів над полем $\mathbb{C}$ розглядають ще інший вид скалярного добутку — **ермітів** скалярний добуток. Основна ідея цього означення полягає в тому, щоб скалярний квадрат довільного вектора, був дійсним невід'ємним числом.

Означення 7.1.2. *Якщо на комплексному векторному просторі $V = V(\mathbb{C})$ задано відображення $V \times V \mapsto \mathbb{C}$, яке задавольняє умовам:*

1. *лінійність по першому аргументу*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{F} \quad \forall u, v, w \in V \quad (\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u, w) + \mu(v, w),$$

2. *ермітовість*

$$\forall u, v \in V \quad (u, v) = \overline{(v, u)},$$

3. *додатної визначеності:*

$$\forall v \in V(\mathbb{C}) \quad v \neq 0 \quad (v, v) - \textit{дійсне додатне число},$$

то говорять, що задано ермітів скалярний добуток, а векторний простір з визначеним на ньому ермітовим скалярним добутком називається **унітарним**.

Приклад 7.1.3. *Стандартним прикладом ермітового простору є арифметичний векторний простір $V = \mathbb{C}^n$ з ермітовим скалярним добутком двох рядків*
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, *що визначається наступним чином:*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=i}^{n} x_i \cdot \bar{y}_i.$$

Самостійно перевірте, що всі властивості виконуються.

Якщо $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис векторного простору, то з білінійності (півторалінійності) скалярного добутку випливає, що він повністю визначається своїми значеннями на базисних векторах, при цьому відповідна матриця

$$\begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) & \dots & (e_1,e_n) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) & \dots & (e_2,e_n) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) & \dots & (e_3,e_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (e_n,e_1) & (e_n,e_2) & (e_n,e_3) & \dots & (e_n,e_n) \end{pmatrix} \tag{7.1.2}$$

називається матрицею **Грама**.

Означення 7.1.3. *Для евклідових та унітарних векторних просторів число*

$$\sqrt{(v,v)} = |v|$$

називається **довжиною** *або нормою вектора v.*

Теорема 7.1.1. *Нерівність Коші-Буняковського.*

Для будь-яких двох векторів $v, w \in V$ має місце нерівність:

$$|(v,w)| \le |v| \cdot |w|, \tag{7.1.3}$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли ці вектори лінійно залежні.

Доведення. Нехай λ — довільне дійсне число, тоді для квадрата довжини вектора $v + \lambda w$ будемо мати

$$0 \le (v + \lambda w, v + \lambda w) = (w,w)\lambda^2 + 2(v,w)\lambda + (v,v).$$

Оскільки при всіх значеннях λ квадратний многочлен набуває невід'ємних значень, то його дискримінант $(v,w)^2 - (v,v)(w,w)$ не повинен бути додатним, звідки $(v,w)^2 \le (v,v)(w,w)$. Оскільки отримана нерівність зв'язує невід'ємні числа, то з обох частин можна вилучити квадратний корінь і отримати потрібну нерівність. Якщо ж має місце рівність, то квадратне рівняння має кратний корінь λ^* і для нього будемо мати $0 = (v + \lambda^* w, v + \lambda^* w)$. З умови невиродженості скалярного добутку випливає рівність $v + \lambda^* w = 0$, яка і означає лінійну залежність векторів. □

Означення 7.1.4. *Дійсне число $\alpha \in [0, \pi]$ називається* **кутом** *між векторами v, w, якщо*

$$\cos\alpha = \frac{(v,w)}{|v| \cdot |w|}. \tag{7.1.4}$$

Означення 7.1.5. *Два вектори $v, w \in V$ називаються* **ортогональними**, *якщо $(v,w) = 0$, тобто кут між цими векторами дорівнює $\frac{\pi}{2}$.*

Лема 7.1.1. *Нехай v, w два ортогональних вектори, тоді має місце:*

$$(v + w, v + w) = |v|^2 + |w|^2;$$

Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — сукупність попарно ортогональних векторів, тоді має місце

$$\left(\sum_{i=1}^{k} v_i, \sum_{i=1}^{k} v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} |v_i|^2.$$

7.2 Ортогональні системи векторів

Лема 7.2.1. *Сукупність попарно ортогональних ненульових векторів $(\forall i, j (i \neq j) \quad (v_i, v_j) = 0)$ є лінійно незалежною.*

Доведення. Припустимо, що деяка лінійна комбінація цих векторів дорівнює нульовому вектору:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \mathbf{0}.$$

Скалярний добуток обох частин рівності на довільний вектор v_j цієї сукупності дає рівність:

$$\lambda_j (v_j, v_j) = 0.$$

Оскільки $v_j \neq \mathbf{0}$, то з умови невиродженості скалярного добутку маємо $(v_j, v_j) \neq 0$, звідки $\lambda_j = 0$. Оскільки вектор v_j був довільним, то цим лема доведена. □

Означення 7.2.1. *Система з n попарно ортогональних векторів n — вимірного векторного простору V, називається* **ортогональним** *базисом простору.*

Якщо крім того довжини векторів ортогонального базису дорівнюють одиниці, то базис називається **ортонормованим**.

Приклад 7.2.1. *1. В $V = \mathbb{R}^n$ ортонормованим базисом є канонічний базис.*

2. На площині $V = \mathbb{R}^2$ ортогональний базис можна вибрати таким чином: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. В $V = \mathbb{R}^3$ система векторів $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4})$, $(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2})$ є ортонормованим базисом.

4. Система векторів $\sin nx$, $\cos nx$, $n \in N$ є ортонормованою системою векторів в просторі $C([0,1])$ всіх неперервних функцій на $[0,1]$.

Теорема 7.2.1. *Будь-який евклідів (унітарний) векторний простір має ортогональний базис.*

Доведення. Доведення теореми проведемо методом математичної індукції по розмірності $k = \dim V$.

База індукції $k = 1$. Якщо $v \in V \quad (v \neq 0)$, то вектор $\frac{v}{|v|}$ має одиничну довжину і породжує одновимірний простір $V = (v)$.

Припустимо, що теорему доведено для векторних просторів розмірність яких менша за k і $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис векторного простору V. За припущенням індукції в векторному підпросторі $\mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_{k-1})$ існує ортонормований базис $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1})$. Спробуємо знайти k — й базисний вектор у вигляді

$$f_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i + e_k.$$

З умов ортогональності отримуємо

$$0 = (f_k, f_j) = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i f_i + e_k, f_j \right) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (f_i, f_j) + (e_k, f_j) = \lambda_j (f_j, f_j) + (e_k, f_j).$$

Звідки отримуємо значення

$$\lambda_j = -\frac{(e_k, f_j)}{(f_j, f_j)}, j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

які визначають k — й базисний вектор ортогонального базису. □

Описаний процес побудови ортогонального базису називається **процесом ортогоналізації**, при цьому маємо збіжність підпросторів

$$\mathcal{L}(e_1, e_2, \ldots, e_i) = \mathcal{L}(f_1, f_2, \ldots, f_i), \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Якщо кожен вектор ортогонального базису поділити на його довжину, то отримаємо ортонормований базис. Неважко переконатися, що матриця Грама скалярного добутку для ортнормованого базису є одиничною.

Теорема 7.2.2. *Нехай в ортонормованому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ вектори u, v евклідового простору мають координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та $y_1, y_2, \ldots, y_n$, тоді для їх скалярного добутку будемо мати формулу:*

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

зокрема для квадрата довжини вектора має місце

$$(u, u) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для унітарного простору формули будуть мати вигляд

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}, \qquad (u,u)=\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

Доведення. Для векторів $u=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, v=\sum_{i=1}^{n} y_ie_i$ будемо мати

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{i=1}^{n} y_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(e_i,e_j).$$

Врахувавши ортонормованість базису отримуємо потрібні формули в евклідовому просторі. Для унітарного простору слід зауважити, що y_j будуть виноситись за знак скалярного добутку із застосуванням спряження. □

Як уже згадувалось арифметичний векторний простір є стандартною моделлю скінченновимірного векторного простору. З теореми випливає, що цей простір оздоблений скалярним добутком значенням якого є сума добутків відповідних координат є стандартною моделлю евклідового простору, а якщо на арифметичному просторі над полем комплексних чисел ввести ермітів скалярний добуток:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i},$$

то він буде стандартною моделлю унітарного векторного простору.

Означення 7.2.2. *Відстанню $d=d(v,w)$ між векторами $v,w\in V$ евклідового (унітарного) простору V називається довжина вектора $v-w$.*

Теорема 7.2.3. *Якщо вектори v,w в ортонормованому базисі мають координати $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, то*

$$d(v,w)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}, \tag{7.2.5}$$

зокрема

$$|v|=d(v,0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}. \tag{7.2.6}$$

7.2.1 Ортогональне доповнення векторного підпростору

Нехай V — евклідів (унітарний) векторний простір і W векторний підпростір, множину $W^{\perp}$ всіх векторів

$$W^{\perp}=\{v\in V|\forall w\in W\ (v,w)=\mathbf{0}\}$$

будемо називати **ортогональним доповненням** підпростору W.

Лема 7.2.2. *Справедливими є такі твердження:*

1. *Ортогональне доповнення $W^{\perp}$ векторного підпоростору W є підпростором;*

2.
$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Доведення. Перевірка п. 1^0 пропонуємо зробити самостійно. Для доведення п. 2^0 оберемо базис підпростору W, доповнимо його до базису простору V і до отриманого базису застосуємо процес ортогоналізації. Вектори базису, які не належать W утворюють базис підпростору $W^{\perp}$. □

Означення 7.2.3. *Згідно попередньої леми, для довільного вектора $v \in V$ маємо однозначний розклад*

$$v = w + w^{\perp}, \quad w \in W, \quad w^{\perp} \in W^{\perp};$$

вектор w називається **ортогональною проекцією** *вектора v на підпростір W, а вектор $w^{\perp}$ –* **ортогональною складовою**;

довжина ортогональної складової називається **відстанню** *вектора v до підпростору W, а кут між вектором v та його ортогональною проекцією w називається кутом між v підпростором W.*

7.3 Задачі

1. Використовуючи процес ортогоналізації, побудувати ортогональний базис підпростору, породженого такою системою векторів:

$$a) \begin{matrix} (1,2,2,-1) \\ (1,1,-5,3) \\ (3,2,8,-7) \end{matrix}; \qquad b) \begin{matrix} (2,1,3,-1) \\ (7,4,3,-3) \\ (1,1,-6,0) \\ (5,7,7,8) \end{matrix}.$$

2. Перевірити, що вектори систем попарно ортогональні і доповнити їх до ортогональних базисів

$$a) \begin{matrix} (1,-2,2,-3) \\ (2,-3,2,4) \end{matrix} \qquad b) \begin{matrix} (1,1,1,2) \\ (1,2,3,-3) \end{matrix}$$

3. Ортогоналізувати систему векторів a_1, a_2, a_3 і доповнити її до ортогонального базису, якщо

   a) $a_1 = (2,1,0,1)$, $a_2 = (-1,2,2,1)$, $a_3 = (1,1,0,-2)$;

   b) $a_1 = (-1,1,3,1)$, $a_2 = (2,2,2,-5)$, $a_3 = (2,3,-3,3)$.

4. Знайти ортогональну проекцію y і ортогональну складову z вектора x на лінійний підпростір L, якщо

   a) $x = (4, -1, -3, 4)$, підпростір L породжений векторами $a_1 = (1, 1, 1, 1,)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

   b) $x = (5, 2, -2, 2)$, підпростір L породжений векторами $a_1 = (2, 1, 1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 3, 0)$, $a_3 = (1, 2, 8, 1)$.

   c) $x = (7, -4, -1, 2)$, підпростір L заданий такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ &3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ &x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0 \end{aligned}\ .$$

5. Лінійний підпростір L заданий рівняннями:
   $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$
   $4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$
   $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0.$

   Знайти рівняння, що задають ортогональне доповнення простору L.

6. Простір L породжений векторами a_1, a_2, a_3. Знайти базис ортогонального доповнення L^* підпростору L.

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 2, 1), \\ a_2 &= (2, 1, 2, 3), \\ a_3 &= (0, 1, -2, 1). \end{aligned}$$

7. Лінійний підпростір L заданий рівняннями:
   $x_1 + x_3 + 5x_4 = 0$
   $2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0$
   $4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0.$

   Знайти рівняння, що задають ортогональне доповнення простору L.

8. Довести, що ортогональне доповнення до лінійного підпростору L простору R_n^* має такі властивості:

   a) $(L^*)^* = L$;

   b) $(L_1 + L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$;

   c) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* + L_2^*$;

   Г) $R_N^* = 0$, $0^* = R_N$,

   де 0 – нульовий підпростір, що містить лише нульовий вектор.

9. Знайти відстань між вектором x і підпростором, породженим векторами a_1, a_2, a_3, якщо

   a) $x = (2, 2, 1, 1)$, $a_1 = (3, 4, -4, -1,)$, $a_2 = (0, 1, -1, 2)$,

   b) $x = (1, 0, 3, 0)$, $a_1 = (5, 3, 4, -3)$, $a_2 = (1, 1, 4, 5)$, $a_3 = (2, -1, 1, 2)$.

10. Знайти довжини сторін і внутрішні кути трикутників, вершини яких задані своїми координатами $A(2, 4, 2, 4, 2)$, $B(6, 4, 4, 4, 6)$, $C(5, 7, 5, 7, 2)$.

11. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 1; -1)$ і має нормальний вектор $n = (1, -2, 3)$.

12. Вектор утворює з осями ox і oz кути $\alpha = 120^0$ і $\gamma = 45^0$. Який кут він утворює з віссю oy?

13. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(-2; 7; 3)$ паралельно площині $x - 4 + 5z - 1 = 0$.

14. Написати рівняння площини, що проходить через точку (3; 1; -2) і через пряму $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$.

15. Написати рівняння площини, що проходить через точку (3; 1; -2) і перпендикулярна прямій $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$.

16. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $2x + y - 3z + 1 = 0$ з прямими $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2}$ і $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}$.

17. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-2; 7; 3)$ паралельно площині $x - 4 + 5z - 1 = 0$.

18. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-1; 3; 3)$ перпендикулярно площині $x - 2 + z - 1 = 0$.

19. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ і перпендикулярна до площини $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

20. Чи можна через пряму $\frac{x-7}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{6}$ провести площину паралельно площині $2x + y - 7z + 1 = 0$?

21. Знайти точку, симетричну з точкою $P\,(+4; +3; +10)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

22. Знайти найкоротшу відстань між двома прямими $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ і $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

23. Обчислити відстань між прямими: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-6}{-3} = \frac{z-3}{2}$ і $\frac{x-4}{8} = \frac{y+12}{-3} = \frac{z+7}{3}$.

Розділ 8

Лінійні відображення та оператори

Нехай V, W — векторні простори над полем $\mathbb{F}$.

Означення 8.0.1. *Відображення з простору V в простір W називається* **лінійним відображенням**

$$\phi : \quad V \mapsto W,$$

якщо воно задовольняє умови

$$\forall v_1, v_2 \in V \qquad \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2); \tag{8.0.1}$$

$$\forall v \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{F} \ \ \phi(\lambda v) = \lambda \phi(v). \tag{8.0.2}$$

Звернемо увагу на те, що операції додавання та множення на скаляр в лівих та правих частинах рівностей (8.0.1), (8.0.2) є операціями в різних векторних просторах.

Приклад 8.0.1. *Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис векторного простору V і $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — довільна система векторів іншого векторного простору W, тоді відображення $e_i \to w_i$, $1 \le i \le n$ однозначно продовжується до лінійного відображення всього простору V в простір W:*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i.$$

Твердження 8.0.1. *Нехай $V_1 \subseteq V$, $W_1 \subseteq W$ — векторні підпростори, а $\phi : V \to W$ — лінійне відображення, тоді множини*

$$\phi(V_1) = \{\phi(v) | v \in V_1\} \subseteq W,$$

$$\phi^{-1}(W_1) = \{v \in V | \phi(v) \in W_1\} \subseteq V$$

є векторними підпросторами, зокрема, векторними підпросторами є

$$Im\phi = \phi(V) \subseteq W \quad i \ \ Ker\phi = \phi^{-1}(0) \subseteq V.$$

Вправа 8.0.1. *Довести це твердження самостійно.*

Підпростори $Im\phi$ та $Ker\phi$ будемо називати образом та ядром лінійного оператора ϕ відповідно.

Теорема 8.0.1.

$$Im\phi \cong V|_{Ker\phi}.$$

Доведення. Самостійно перевірте, що відображення

$$v + Ker\phi \mapsto \phi(v)$$

є не тільки бієкцією, а й ізоморфізмом векторних просторів. □

Означення 8.0.2. *Якщо простори V та W рівні, $V = W$, то лінійне відображення називають* **лінійним оператором**, *визначеним на просторі V*

Приклад 8.0.2. *1. Нульове відображення $\mathbf{0}: \ \forall v \in V \ \mathbf{0}(v) = 0 \in W$ є очевидно лінійним;*

2. Тотожним (одиничним) називається оператор $Id: \ \forall v \quad Id(v) = v$, визначений на просторі V;

3. Будь-який лінійний функціонал на просторі V є лінійним відображенням $V \mapsto \mathbb{F}$, де поле $\mathbb{F}$ розглядається як одновимірний векторний простір.

Приклад 8.0.3. *Якщо $V = \mathbb{R}^2, \ \mathbb{R}^3$ є евклідові площина або тривимірний простір, то повороти, симетрії відносно прямої, гомотетії є прикладами лінійних операторів.*

Питання. Чи є паралельний перенос лінійним оператором на евклідовій площині?

Приклад 8.0.4. *Нехай $V = \mathbb{F}^n, W = \mathbb{F}^m$ – арифметичні простори вектор-стовпчиків і $A-$ довільна $m \times n$ матриця, тоді відображення $\phi : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$*

$$\phi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n$$

є очевидно лінійним.

Отже, з точки зору лінійних відображень, розв'язання системи лінійних рівнянь

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

можна розглядати як знаходження прообразу вектора $\mathbf{b}$ при вищенаведеному лінійному відображенні.

Наступний приклад є узагальненням попереднього.

Приклад 8.0.5. *Нехай* $V = M_{n,k}(\mathbb{F}), W = M_{m,k}(\mathbb{F}), W_1 = M_{n,l}(\mathbb{F})-$ *простори прямокутних матриць і* A *є* $m \times n$*-матрицею,* B *—* $k \times l$*-матриця, тоді маємо лінійні відображення* $V \mapsto W, \quad V \mapsto W_1:$

$$M_{n,k} \ni X \mapsto A \cdot X \in M_{m,k},$$

$$M_{n,k} \ni X \mapsto X \cdot B \in M_{n,l},$$

Приклад 8.0.6. *Нехай* $V = V_1 \times V_2$ *— декартів добуток векторних просторів, тоді проекції:*

$$Pr_1 : (v_1, v_2) \mapsto v_1, \quad Pr_2 : (v_1, v_2) \mapsto v_2$$

є прикладами лінійних відображень на простори V_1 *та* V_2 *відповідно;*

Якщо маємо пряму суму підпросторів $V = V_1 \oplus V_2$*, то відображення*

$$\pi_1 : v_1 + v_2 \mapsto v_1, \quad \pi_2 : v_1 + v_2 \mapsto v_2$$

є прикладами лінійних операторів на просторі V*.*

8.1 Операції над лінійними відображеннями.

Позначимо через $Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ множину всіх лінійних відображень з простору V в простір W, а через $End_{\mathbb{F}}(V) = Hom_{\mathbb{F}}(V, V)$ — множину всіх лінійних операторів на просторі V.

Введемо на цих множинах операції.

Сумою двох лінійних відображень $\phi_1, \phi_2 \in Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ називається лінійне відображення $\phi_1 + \phi_2$, дія якого на вектор $v \in V$ визначається рівністю:

$$(\phi_1 + \phi_2)(v) = \phi_1(v) + \phi_2(v).$$

Добутком лінійного відображення $\phi \in Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ на скаляр $\lambda \in \mathbb{F}$ називається лінійне відображення $\lambda \cdot \phi$, дія якого на вектор $v \in V$ визначається таким чином:

$$(\lambda \cdot \phi)(v) = \lambda \cdot \phi(v).$$

Звернемо увагу на те, що в лівій частині рівностей операції $+, \cdot$ є операціями над відображеннями, які визначаються через ті самі операції у векторному просторі W (праві частини рівностей).

Теорема 8.1.1. *Множина* $Hom_{\mathbb{F}}(V, W)$ *є векторним простором над полем* $\mathbb{F}$*, відносно так введених операцій додавання та множення на скаляр.*

Доведення. Пропонуємо довести цю теорему самостійно. $\square$

Вправа 8.1.1. *Яке лінійне відображення буде нейтральним елементом для дії додавання?*

Введемо операцію композиції лінійних відображень. Нехай $\phi_2 : V \to W, \phi_1 : U \to V$ — лінійні відображення векторних просторів. Композицією $\phi_2 \circ \phi_1$ називається лінійне відображення

$$\phi_1 \circ \phi_2 : U \mapsto W,$$

яке визначається таким чином:

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(u) = \phi_1 (\phi_2(u)) .$$

Самостійно перевірте, що це дійсно лінійне відображення.

Теорема 8.1.2. *Множина $End_{\mathbb{F}}(V)$ є кільцем з одиницею відносно введених операцій додавання і композиції лінійних операторів.*

Доведення. Цю теорему також пропонуємо довести самостійно. З'ясуйте також який оператор буде нейтральним елементом відносно операції додавання, а який відносно множення. □

8.2 Інваріантні підпростори лінійних операторів.

Означення 8.2.1. *Підпростір U називається* **інваріантним** *для оператора $\phi \in End_{\mathbb{F}}(V)$ (або ϕ-інваріантним) якщо*

$$\forall u \in U \qquad \phi(u) \in U.$$

Приклад 8.2.1. *Для довільного оператора ϕ інваріантними підпросторами є*

1. *підпростір, що складається з одного вектора —* $\mathbf{0}$ *і весь простір V;*

2. *ядро $Ker\phi$ та образ $Im\phi$ лінійного оператора ϕ.*

Якщо підпростір U є інваріантним для оператора $\phi \in End_{\mathbb{F}}(V)$, то ми можемо розглянути звуження оператора ϕ на U: $\phi|_U : U \to U$.

Довільний ненульовий вектор v одновимірного інваріантного підпростіру U ($dim U = 1$) називається **власним вектором** оператора ϕ. Тобто для деякого $\lambda \in \mathbb{F}$ має місце

$$\phi(v) = \lambda v.$$

Нехай $u_0 \in U$ інший ненульовий вектор підпростору U. Тоді, $\phi(u_0) \in U$, а оскільки U — одновимірний, то існує $\lambda \in \mathbb{F}$ таке, що $\phi(u_0) = \lambda u_0$. Будь-який інший вектор простору U має вигляд $u = \alpha u_0, \quad \alpha \in \mathbb{F}$. Результат дії оператора на цей вектор буде наступним:

$$\phi(u) = \phi(\alpha u_0) = \alpha\phi(u_0) = \alpha\lambda u_0 = \lambda\alpha u_0 = \lambda u.$$

Означення 8.2.2. *Число $\lambda \in \mathbb{F}$ називається* **власним числом** *оператора ϕ, якщо існує власний вектор и такий, що має місце рівність:*

$$\phi(u) = \lambda u.$$

Множина всіх власних чисел оператора ϕ називається його спектром і позначається $Spec_{\phi}$.

Рівність $\phi(u) = \lambda u$ можна переписати в операторній формі:

$$\phi(u) - \lambda u = (\phi - \lambda \cdot Id)(u) = 0. \tag{8.2.3}$$

Тоді власний вектор можна визначити, як ненульовий елемент ядра оператора $(\phi - \lambda Id)$, при деякому λ.

Для фіксованого числа $\lambda \in \mathbb{F}$ розглянемо множину векторів

$$V^{\lambda} = \{v \in V | (\phi - \lambda \cdot Id)(v) = 0\},$$

Лема 8.2.1. *Для довільного $\lambda \in \mathbb{F}$ множина V^{λ}, є інваріантним векторним підпростором.*

Доведення. Пропонуємо довести самостійно. □

Означення 8.2.3. *Підпростір V^{λ} називається підпростором власних векторів, що відповідають власному числу λ.*

Означення 8.2.4. *Оператор ϕ визначений на векторному просторі V називається* **діагоналізовним** *або* **напівпростим**, *якщо існує базис простору V, що складається з власних векторів оператора ϕ.*

Теорема 8.2.1. *Нехай $v_1, v_2, \ldots, v_k$ — система власних векторів оператора ϕ, що відповідають різним власним числам. Тоді ця система векторів є лінійно незалежною.*

Доведення. Доведення теореми проведемо методом математичної індукції по кількості векторів. База індукції — $k = 1$. Оскільки власний вектор є ненульовим, то система з одного вектора v_1 є, очевидно, лінійно незалежною.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження має місце для систем, що містять менше ніж k векторів. Застосуємо оператор ϕ до лінійної комбінації $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ його власних векторів:

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi(v_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i.$$

Якщо вказана лінійна комбінація є нульовою, то будемо мати дві рівності:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i v_i = 0.$$

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\lambda_1 \neq 0$. Помножимо першу рівність на λ_1 і віднімаємо її від другої, отримаємо

$$\sum_{i=2}^{k} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0.$$

За припущенням індукції вектори $v_2, v_3, \ldots, v_k$ є лінійно незалежними, отже остання рівність можлива лише якщо

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \alpha_3(\lambda_3 - \lambda_1) = \ldots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0.$$

Оскільки, за умовою теореми власні числа $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ відмінні від λ_1, отримуємо, що $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_k = 0$. Отже, маємо імплікації:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0,$$

і приходимо до висновку, що вся система власних векторів $v_1, v_2, \ldots, v_k$ є лінійно незалежною. □

Наслідок 8.2.1. *(Достатня умова діагоналізовності оператора.)*

Якщо спектр оператора визначеного на n — вимірному просторі складається з n різних дійсних чисел, то цей оператор є діагоналізовним.

Доведення. Дійсно, згідно доведеної теореми, власні вектори, що відповідають різним власним числам є лінійно незалежними, а оскільки їх кількість дорівнює розмірності простору, то вони утворюють базис. □

Означення 8.2.5. *Оператор ϕ визначений на векторному просторі V називається* **нільпотентним**, *якщо існує натуральне число m таке, що оператор ϕ^m є нульовим.*

Приклад 8.2.2. *Використовуючи конструкцію (8.0.1) отримаємо приклад нільпотентного оператора: $e_1 \to e_2$, $e_2 \to e_3$, $\ldots$, $e_{n-1} \to e_n$, $e_n \to 0$.*

Лема 8.2.2. *Спектр нільпотентного оператора складається лише з нульового власного числа.*

Доведення. Припустимо, що спектр нільпотентного оператора ϕ містить власне число $\lambda \neq 0$ і $u \in V$ відповідний власний вектор. Тоді будемо мати

$$\phi^m(u) = \lambda^m u;$$

якщо ϕ^m — нульовий оператор, то $\phi^m(u) = \mathbf{0}$ і ми отримуємо суперечність, адже $\lambda \neq 0$ і u — ненульовий вектор. □

8.3 Матриці лінійних відображень.

Нехай V, W — векторні простори над полем $\mathbb{F}$ і $\phi : V \mapsto W$ — лінійне відображення. Нагадаємо, що лінійне відображення однозначно визначається образами базисних векторів (8.0.1). Причому ці образи можуть-бути довільними векторами простору W. Оберемо базиси $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V, \;\; u_1, u_2, \ldots, u_m \in W$ і розглянемо дію відображення на елементах базису простору V. Розкладаючи образи цих базисних елементів по базису простору W отримуємо:

$$\phi(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot u_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.3.4}$$

Нехай тепер $v \in V$ — довільний вектор, який в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ має координати $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Питання: якими будуть координати $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ вектора $\phi(v)$ (його образу) в базисі $u_1, u_2, \ldots, u_m \in W$. Застосувавши формули (8.3.4), отримуємо

$$\phi(v) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} \cdot u_j = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i\right) \cdot u_j$$

Коефіцієнти при векторах u_j і є координатами вектора $\phi(v)$ в базисі $u_1, u_2, \ldots, u_m$, тобто

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} x_i \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Позначимо через $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ вектор-стовпчики координат векторів v та $\phi(v)$, тоді записані вище рівності можна переписати у матричній формі

$$\mathbf{y} = A_\phi \cdot \mathbf{x}. \tag{8.3.5}$$

Означення 8.3.1. *Матриця*

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \ldots & \alpha_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}, \tag{8.3.6}$$

стовпчиками якої є коефіцієнти розкладу (8.3.4) *векторів* $\phi(e_i)$ *по базисним векторам простору* W *(i− й стовпчик) називається* **матрицею лінійного відображення** ϕ *в базисах* $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$, $\quad u_1, u_2, \ldots, u_m \in W$

Отже при фіксації базисів просторів отримуємо відповідність:

Лінійне відображення $\quad\mapsto\quad$ матриця. Навпаки, для даної матриці (8.3.6) побудуємо оператор ϕ дія якого на базисних векторах визначається формулами (8.3.4). Оскільки розклад будь-якого вектора по елементах базису векторного простору є однозначним, то маємо біекцію:

$$\phi \leftrightarrow A_\phi. \tag{8.3.7}$$

Теорема 8.3.1. *Біекція* (8.3.7) *є ізоморфізмом векторних просторів*

$$Hom_{\mathbb{F}}(V, W) \cong M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що

$$A_{\phi_1+\phi_2} = A_{\phi_1} + A_{\phi_2}, \quad A_{\lambda\phi} = \lambda A_\phi.$$

Пропонуємо це зробити самостійно застосуванням формули (8.3.5). □

Нехай $V = W$ і обидва базиси збігаються з $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$. В цій ситуації маємо ізоморфізм кілець.

Теорема 8.3.2. *Біекція* (8.3.7) *є ізоморфізмом кілець*

$$End_{\mathbb{F}}(V) \cong M_n(\mathbb{F}).$$

Доведення. Для доведення, слід ще довести тотожність:

$$A_{\phi_1 \circ \phi_2} = A_{\phi_1} \cdot A_{\phi_2}.$$

□

Наявність інваріантного підпростору для лінійного оператора ϕ дозволяє вибрати базис простору таким чином, щоб матриця ϕ мала простіший вигляд.

Нехай підпростір U є ϕ-інваріантним, і e_1, e_2, …, e_k — базис підпростору ϕ. Доповнимо його до базису всього простору V векторами e_{k+1}, …, e_n. Оскільки $\phi(e_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j$, $1 \leq i \leq k$, то в базисі e_1, e_2, …, e_n матриця лінійного оператора має вигляд

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

де A є матрицею $\phi|_U$ в базисі e_1, e_2, …, e_k.

Нехай тепер простір V є прямою сумою двох інваріантних підпросторів U та W:

$$V = U \oplus W.$$

Виберемо в них базиси e_1, e_2, …, e_k і f_1, f_2, …, f_m. Оскільки V є прямою сумою підпросторів U і W, то вектори e_1, …, e_k, f_1, …, f_m утворюють базис простору V. В цьому базисі матриця лінійного оператора ϕ має вигляд

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

де A є матрицею $\phi|_U$ в базисі e_1, e_2, …, e_k, де C є матрицею $\phi|_W$ в базисі f_1, f_2, …, f_m. Позначимо $\phi_1 = \phi|_U$ і $\phi_2 = \phi|_W$. Визначимо оператор $\phi_1 \oplus \phi_2$ на просторі V за таким правилом: для довільного вектора $v \in V$ існують $v_1 \in U$ та $v_2 \in W$ такі, що $v = v_1 + v_2$, тоді

$$\phi_1 \oplus \phi_2(v) = \phi_1(v_1) + \phi_2(v_2).$$

Очевидно, що $\phi_1 \oplus \phi_2 = \phi$. Будемо говорити, що лінійний оператор ϕ є прямою сумою операторів ϕ_1 і ϕ_2.

8.3.1 Зв'язок між матрицями лінійних відображень в різних базисах. Природним є питання про зв'язок між матрицями лінійних відображень $V \to W$ при зміні базисів в цих просторах. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиси у векторному просторі V з матрицею переходу C, а $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m$ — два базиси у векторному просторі W з матрицею переходу S. Позначимо через A_ϕ матрицю лінійного відображення в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$, $u_1, u_2, \ldots, u_m \in W$, і через A'_ϕ матрицю лінійного відображення в базисах $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n \in V$, $u'_1, u'_2, \ldots, u'_m \in W$. Якщо $\mathbf{x}-$ координати довільного вектора $v \in V$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то згідно формули (8.3.5) вектор-стовпчик координат $\mathbf{y}$ вектора $\phi(v) \in W$ в базисі $v_1, v_2, \ldots, v_m$ отримується наступним чином:

$$\mathbf{y} = A_\phi \cdot \mathbf{x}.$$

Застосуємо формулу зв'язку (4.2.15) між координатами вектора у різних базисах. Для координат векторів $v, \phi(v)$ в штрихованих базисах $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ маємо: $\mathbf{x} = C \cdot \mathbf{x}'$, $\mathbf{y} = S \cdot \mathbf{y}'$. Підстановка в попередню рівність дає нам

$$S \cdot \mathbf{y}' = A_\phi \cdot (C \cdot \mathbf{x}').$$

Згадаємо, що матриця переходу від одного базису до іншого є оборотною, а отже маємо таку рівність:

$$\mathbf{y}' = \left(S^{-1} \cdot A_\phi \cdot C\right) \cdot \mathbf{x}'.$$

Порівнюючи цю тотожність з формулою (8.3.5) приходимо до висновку, що матриця $S^{-1} \cdot A_\phi \cdot C$ є матрицею оператора ϕ в штрихованих базисах, тобто має місце рівність:

$$A'_\phi = S^{-1} \cdot A_\phi \cdot C. \tag{8.3.8}$$

Зокрема, у випадку коли $V = W$ ($\phi-$ є оператором), $m = n$, при $e_1 = u_1, \ldots, e_n = u_n$, $\;e'_1 = u'_1, \ldots, e'_n = u'_n$ маємо $S = C$, звідки отримуємо

$$A'_\phi = C^{-1} \cdot A_\phi \cdot C. \tag{8.3.9}$$

8.3.2 Знаходження спектра оператора та обчислення координат його власних векторів

Нехай при фіксованому базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторного простору V оператору ϕ, визначеному на цьому просторі, відповідає матриця A_ϕ, тоді оператору $\phi - \lambda Id$ відповідає матриця $A_\phi - \lambda E$ в цьому ж базисі. Отже, для знаходження координат власного вектора u, з власним числом λ, який задовольняє рівнянню 8.2.3, тобто належить ядру оператора $\phi - \lambda Id$, слід розв'язати систему однорідних лінійних рівнянь

$$(A_\phi - \lambda E) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{8.3.10}$$

Система лінійних однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді коли стовпчики основної матриці є лінійно залежними, а отже коли визначник матриці $A_\phi - \lambda E$ дорівнює 0. Таким чином, власні числа оператора ϕ мають задовольняти рівнянню:

$$Det\,(A_\phi - \lambda E) = 0, \tag{8.3.11}$$

яке називається **характеристичним рівнянням**. Для довільної матриці A порядку n многочлен $|A - \lambda E|$ будемо називати її **характеристичним многочленом**.

Твердження 8.3.1. *Якщо для квадратних матриць A і B існує така матриця C, що $A = C^{-1}BC$, то матриці A і B мають однакові характеристичні многочлени.*

Доведення. Справді, за умовою

$$|A - \lambda E| = |C^{-1}BC - \lambda E|,$$

оскільки $\lambda E = \lambda C^{-1}C$, то враховуючи, що визначник добутку матриць дорівнює добутку визначників, отримаємо

$$|A-\lambda E| = |C^{-1}BC-\lambda C^{-1}C| = |C^{-1}(B-\lambda E)C| = |C^{-1}|\cdot|B-\lambda E|\cdot|C| = |B-\lambda E|,$$

що і потрібно було довести. □

Отже, множина розв'язків характеристичного рівняння дорівнює спектру оператора ϕ, і не залежить від того, в якому базисі ми розглядаємо матрицю цього лінійного оператора. Розв'язуючи систему лінійних рівнянь 8.3.10 для кожного із знайдених власних чисел λ, ми отримаємо координати всіх власних векторів оператора ϕ.

8.4 Жорданова нормальна форма

В цьому параграфі ми будемо розглядати лінійні оператори, визначені на n-вимірному просторі V, що заданий над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Означення 8.4.1. *Квадратна матриця, у якої n стовпчиків і рядочків, виду*

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{8.4.12}$$

називаєтьcя **жордановою клітиною** *або* **клітиною Жордана** *розміру n.*

Говоритимемо, що матриця A лінійного оператора ϕ має жорданову нормальну форму, якщо вона має такий блочно-діагональний вигляд:

$$A_\phi = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{n_3}(\lambda_3) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & J_{n_{k-1}}(\lambda_{k-1}) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{n_k}(\lambda_k) \end{array}\right). \tag{8.4.13}$$

Базис, в якому матриця лінійного оператора має вигляд 8.4.13 називається жордановим базисом.

Твердження 8.4.1. *Діагональними елементами жорданової нормальної форми лінійного оператора можуть бути лише його власні числа.*

Доведення. Нехай в деякому базисі матриця лінійного оператора ϕ має жорданову нормальну форму. І нехай i-й стовпчик є стовпчиком, що містить перший стовпчик клітини Жордана. Тоді для i-го базисного вектора e справедливою є рівність: $\phi(e) = \lambda e$, де λ — єдине число i-го стовпчика, що не обов'язково дорівнює 0. Остання рівність означає, що λ є власним числом оператора ϕ. $\square$

8.4.1 Жорданова нормальна форма нільпотентного оператора. Якщо ϕ — нільпотентний оператор, то з доведеного твердження випливає, що жорданова нормальна форма ϕ буде мати вигляд

$$A_\phi = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} J_{n_1}(0) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & J_{n_2}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & J_{n_3}(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J_{n_k}(0) \end{array}\right), \tag{8.4.14}$$

де кожна жорданова клітина

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8.4.15}$$

Для того, щоб матриця лінійного оператора в деякому базисі e_1^1, e_2^1, e_3^1, $\dots$,$e_{n_1}^1$, e_1^2, $\dots$, $e_{n_k}^k$ $(n_1+n_2+\dots+n_k = n)$ мала вигляд 8.4.4, тобто для того, щоб цей базис був жордановим базисом, необхідно і достатньо, щоб виконувались такі рівності $\phi(e_1^i) = 0$, $\phi(e_2^i) = e_1^i$, $\phi(e_3^i) = e_2^i$, $\dots$, $\phi(e_{n_i}^i) = e_{n_i-1}^i$. Діаграма такого базису буде мати вигляд:

$$\begin{array}{c} e_{n_1}^1 \xrightarrow{\phi} e_{n_1-1}^1 \xrightarrow{\phi} e_{n_1-2}^1 \xrightarrow{\phi} \dots \xrightarrow{\phi} e_1^1 \\ e_{n_2}^2 \xrightarrow{\phi} e_{n_2-1}^2 \xrightarrow{\phi} e_{n_2-2}^2 \xrightarrow{\phi} \dots \xrightarrow{\phi} e_1^2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_{n_k}^k \xrightarrow{\phi} e_{n_k-1}^k \xrightarrow{\phi} e_{n_k-2}^k \xrightarrow{\phi} \dots \xrightarrow{\phi} e_1^k, \end{array}$$

причому останній стовпчик векторів базису під дією оператора ϕ переходить в 0:

$$e_1^1 \xrightarrow{\phi} 0; \qquad e_1^2 \xrightarrow{\phi} 0; \quad \dots \quad e_1^k \xrightarrow{\phi} 0.$$

Тобто, базис простору V можна представити у вигляді об'єднання k «ланцюгів». Такий базис називатимемо ланцюговим.

Теорема 8.4.1 (Жордана для нільпотентного оператора)**.** *Для довільного нільпотентного оператора існує жорданів базис.*

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що для довільного нільпотентного оператора існує ланцюговий базис. Нехай ϕ — нільпотентний оператор, і m — найменше натуральне число, для якого ϕ^m є нульовим. Називатимемо m показником нільпотентності. Доведення проведемо індукцією по m.

База індукції: $m = 1$. Тоді ϕ — це нульовий оператор, і для довільного вектора $v \in V$ справедлива рівність $\phi(v) = 0$. А тому будь-який базис $e_1, \ldots, e_n$ простору V буде ланцюговим, що складається з n ланцюгів.

Індукційний крок: припустимо, що твердження правильне для всіх операторів, показник нільпотентності яких менше m, і нехай ϕ — лінійний нільпотентний оператор, показник нільпотентності якого дорівнює m.

Розглянемо підпростір $Im\phi = W$. Для довільного вектора $v \in W$ існує такий $x \in V$, що $v = \phi(x)$, а тому справедливим є ланцюг рівностей:

$$\phi^{m-1}(v) = \phi^{m-1}(\phi(x)) = \phi^m(x) = 0.$$

Тобто обмеження $\phi|_W$ оператора ϕ на підпростір W є нільпотентним оператором з показником нільпотентності $m - 1$. За припущенням індукції $\phi|_W$ має у просторі W жорданів базис, діаграма якого має вигляд:

$$\begin{array}{ccccccccc}
e^1_{l_1} & \xrightarrow{\phi} & e^1_{l_l-1} & \xrightarrow{\phi} & e^1_{l_1-2} & \xrightarrow{\phi} & \ldots & \xrightarrow{\phi} & e^1_1 \\
e^2_{l_2} & \xrightarrow{\phi} & e^2_{l_2-1} & \xrightarrow{\phi} & e^2_{l_2-2} & \xrightarrow{\phi} & \ldots & \xrightarrow{\phi} & e^2_1 \\
 & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\
e^k_{l_k} & \xrightarrow{\phi} & e^k_{l_k-1} & \xrightarrow{\phi} & e^k_{l_k-2} & \xrightarrow{\phi} & \ldots & \xrightarrow{\phi} & e^k_1.
\end{array}$$

Побудуємо базис простору V.

Позначимо $l_1+l_2+\ldots+l_k = s$, і зауважимо, що $s = dimIm\phi$. Доповнимо базис підпростору W прообразами $e^i_{l_i+1}$ векторів $e^i_{l_i}$, $1 \le i \le k$ (тобто $\phi(e^i_{l_i+1}) = e^i_{l_i}$, $1 \le i \le k$).

Вектори $e^1_1, e^2_1, \ldots, e^k_1$ належать до перетину двох підпросторів : $Ker\phi$ і $Im\phi$. Доповнимо цю систему векторів до базису $Ker\phi$ векторами $f_1, f_2, \ldots, f_r$, де $r = dimKer\phi - k$, звідки $r + k = dimKer\phi$.

Розглянемо систему векторів $e^i_{l_i+1}, e^i_{l_i}, \ldots, e^i_1$, $1 \le i \le k$, $f_1, f_2, \ldots, f_r$. Вона містить $s + k + r$ векторів, а оскільки

$$s + k + r = dimIm\phi + dimKer\phi = dimV = n,$$

то для того, щоб довести, що ця система утворює жорданів базис для лінійного нільпотентного оператора ϕ, достатньо показати, що вектори $e^i_{l_i+1}, e^i_{l_i}, \ldots, e^i_1$, $1 \le i \le k$, $f_1, f_2, \ldots, f_r$ є лінійно незалежними. Припустимо, що це не так. Нехай існує лінійна комбінація цих векторів рівна 0:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i+1} \alpha_{ij} e^i_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_i f_i. \tag{8.4.16}$$

Подіємо на цю рівність оператором ϕ, оскільки $\phi(e^i_j) = e^i_{j-1}$, $\phi(e^i_1) = 0$, $\phi(f_i) = 0$, то

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=2}^{l_i+1} \alpha_{ij} e^i_{j-1}.$$

Але вектори $e^i_{l_i}, \ldots, e^i_1$, $1 \leq i \leq k$ є базисом простору W, отже $\alpha_{ij} = 0$, ($1 \leq i \leq k$, $2 \leq j \leq l_k + 1$). А тому рівність (8.4.16) можна переписати у вигляді:

$$0 = \alpha_{11} e^1_1 + \alpha_{21} e^2_1 + \ldots + \alpha_{k1} e^k_1 + \sum_{i=1}^{r} \beta_i f_i.$$

Ця лінійна комбінація є комбінацією базисних векторів підпростору $Ker\phi$. Отже, $\alpha_{i1} = 0$, $1 \leq i \leq k$, $\beta_j = 0$, $1 \leq j \leq r$. Таким чином, всі коефіцієнти лінійної комбінації (8.4.16) дорівнюють 0, тобто вектори $e^i_{l_i+1}$, $e^i_{l_i}, \ldots$, e^i_1, $1 \leq i \leq k$, f_1, f_2, $\ldots$, f_r лінійно незалежні. Теорема доведена. □

8.4.2 Анулюючий многочлен Нехай ϕ — лінійний оператор, A — його матриця в деякому базисі, $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n x$ — многочлен з комплексними коефіцієнтами.

Многочлен $f(x)$ називатимемо **анулюючим** для лінійного оператора ϕ, якщо $f(\phi) = a_0 \phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \phi + a_n \cdot Id = \mathbf{0}$, тобто $f(\phi)$ є нульовим оператором. Зауважимо, що в цьому випадку матриця $f(A) = a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-1} A + a_n A = \mathbf{0}$ є нульовою матрицею.

Анулюючі многочлени існують для довільного оператора ϕ. Справді, розглянемо послідовність лінійних операторів:

$$Id,\ \phi,\ \phi^2,\ \ldots,\ \phi^{n^2}.$$

Вона містить $n^2 + 1$ елемента, а оскільки простір всіх лінійних операторів, визначених на n-вимірному просторі V має розмірність n^2, то ця послідовність є лінійно залежною системою векторів. Отже, існує нетривіальна лінійна комбінація векторів Id, ϕ, ϕ^2, $\ldots$, ϕ^{n^2} рівна 0, тобто для ϕ існує анулюючий многочлен.

Теорема 8.4.2 (Гамільтона-Келі)**.** *Характеристичний многочлен лінійного оператора є анулюючим для нього.*

Доведення. Нехай ϕ — лінійний оператор, $A = (\alpha_{ij})^n_{i,j=1}$ — його матриця в базисі e_1, e_2, $\ldots$, e_n, $\chi(A) = Det(A - \lambda E)$ — його характеристичний многочлен. Тоді

$$\varphi(e_1) = \alpha_{11} \cdot Id(e_1) + \alpha_{21} e_2 + \ldots + \alpha_{n1} e_n$$

$$\varphi(e_2) = \alpha_{12} \cdot e_1 + \alpha_{22} Id(e_2) + \ldots + \alpha_{n2} e_n$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\varphi(e_n) = \alpha_{1n} \cdot e_1 + \alpha_{2n} e_2 + \ldots + \alpha_{nn} Id(e_n).$$

Перенесемо ліві частини рівностей в праві.

$$\varphi(e_1) - \alpha_{11} \cdot Id(e_1) - \alpha_{21} e_2 - \ldots - \alpha_{n1} e_n = \mathbf{0}$$

$$\varphi(e_2) - \alpha_{12} \cdot e_1 - \alpha_{22} Id(e_2) - \ldots - \alpha_{n2} e_n = \mathbf{0}$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

$$\varphi(e_n) - \alpha_{1n} \cdot e_1 - \alpha_{2n} e_2 - \ldots + \alpha_{nn} Id(e_n) = \mathbf{0}.$$

Позначимо через $A_{ij}(\phi)$ алгебраїчне доповнення до (i,j)-го елемента матриці лінійного оператора $(A - \phi E)$. Домножимо першу рівність на $A_{11}(\phi)$, другу — на $A_{12}(\phi)$, ..., останню — на $A_{1n}(\phi)$, і всі отримані рівності додамо:

$$(\alpha_{11} \cdot Id - \phi) A_{11}(\phi)(e_1) + \alpha_{12} \cdot Id \cdot A_{12}(\phi)(e_1) + \ldots + \alpha_{1n} \cdot Id \cdot A_{1n}(\phi)(e_1)) +$$
$$+ (\alpha_{21} \cdot Id - \phi) A_{11}(\phi)(e_2) + \alpha_{22} \cdot Id \cdot A_{12}(\phi)(e_2) + \ldots + \alpha_{2n} \cdot Id \cdot A_{1n}(\phi)(e_2)) + \ldots +$$
$$+ (\alpha_{n1} \cdot Id - \phi) A_{11}(\phi)(e_n) + \alpha_{n2} \cdot Id \cdot A_{12}(\phi)(e_n) + \ldots + \alpha_{nn} \cdot Id \cdot A_{1n}(\phi)(e_n)) = \mathbf{0}$$

враховуючи формули розкладу визначника за стовпчиком і чужим стовпчиком маємо:

$$\chi(\phi)(e_1) = \mathbf{0}.$$

Аналогічно $\chi(\phi)(e_2) = \mathbf{0}$, ..., $\chi(\phi)(e_n) = \mathbf{0}$. Отже для довільного вектора $v \in V$ виконується рівність: $\chi(\phi)(v) = \mathbf{0}$, тобто $\chi(A)$ є анулюючим для ϕ. □

8.4.3 Кореневі підпростори.

Означення 8.4.2. *Вектор $a \in V$ називаєтьcя кореневим вектором лінійного оператора ϕ з власним значенням λ якщо існує таке натуральне число k, що*

$$(\varphi - \lambda Id)^k (a) = \mathbf{0}.$$

Приклад 8.4.1. *1. Кожен власний вектор є кореневим.*

2. $\mathbf{0}$-вектор є кореневим.

Лема 8.4.1. *Для довільного λ множина $V(\lambda)$ всіх кореневих векторів*

$$V(\lambda) = \{v \in V | \exists k : \quad (\phi - \lambda \cdot Id)^k (v) = 0\}$$

є інваріантним векторним підпростором.

Доведення. зауважимо, що $V(\lambda) \neq \emptyset$, оскільки $\mathbf{0} \in V(\lambda)$. Нехай $x, y \in V(\lambda)$, тоді існують такі натуральні числа k_1 і k_2, що $(\varphi - \lambda Id)_1^k(x) = \mathbf{0}$ і $(\varphi - \lambda Id)_2^k(y) = \mathbf{0}$. Визначимо $k = \max\{k_1, k_2\}$. Тоді

$$(\varphi - \lambda Id)^k(x + y) = (\varphi - \lambda Id)^k(x) + (\varphi - \lambda Id)^k(y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Отже $x + y \in V(\lambda)$.

Нехай тепер $x \in V(\lambda)$, $\alpha \in F$. Тоді існує таке натуральне число k, що $(\varphi - \lambda Id)^k(x) = \mathbf{0}$. А тому

$$(\varphi - \lambda Id)^k(\alpha x) = \alpha(\varphi - \lambda Id)^k(x) = \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Тобто $\alpha \cdot x \in V(\lambda)$. Отже $V(\lambda)$ — підпростір.

$V(\lambda)$ — інваріантний. Справді, якщо $x \in V(\lambda)$, то $(\varphi - \lambda Id)^k(x) = \mathbf{0}$ для деякого k, а тому

$$(\varphi - \lambda Id)^k(\varphi(x)) = \varphi((\varphi - \lambda Id)^k(x)) = \varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Тобто $\varphi(x) \in V(\lambda)$. □

Підпростір всіх кореневих векторів $V(\lambda)$ будемо називати кореневим підпростором.

Лема 8.4.2. *$V(\lambda) \neq \mathbf{0}$ тоді і тільки тоді, коли λ — власне число.*

Доведення. Якщо λ — власне число, то $V(\lambda)$ містить власні вектори з власним числом λ і $V(\lambda) \neq \mathbf{0}$.

Нехай тепер $V(\lambda) \neq \mathbf{0}$. Тоді існує $x \in V(\lambda)$, $x \neq \mathbf{0}$. Виберемо найменше k для якого $(\varphi - \lambda Id)^k(x) = \mathbf{0}$. Звідки $(\varphi - \lambda Id)(\varphi - \lambda Id)^{k-1}(x) = \mathbf{0}$. Покладемо $y = (\varphi - \lambda Id)^{k-1}(x)$, тоді $(\varphi - \lambda Id)(y) = \mathbf{0}$. Тобто y є власним вектором оператора ϕ з власним значенням λ. □

Теорема 8.4.3. *Нехай для характеристичного многочлена $\chi_\phi(\lambda)$ лінійного оператора ϕ виконуєтьcя рівність:*

$$\chi_\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}.$$

Тоді простір V є прямою сумою кореневих підпросторів оператора ϕ:

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots V(\lambda_m).$$

Доведення. Нехай

$$f_i(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - \lambda_i)^{k_1}} \chi_\varphi(\lambda).$$

Визначимо оператори $\psi_i = f_i(\varphi)$, і позначимо $V_i = Im\psi_i$, $1 \leq i \leq m$. Зауважимо, що оскільки V_i є образом оператора ψ_i, то V_i є підпростором векторного простору V.

1. Покажемо, спочатку, що V_i є підпростором кореневого простору $V(\lambda_i)$, тобто $V_i \subset V(\lambda_i)$, $1 \le i \le m$. Для цього достатньо показати, що для довільного вектора $x \in V_i$ виконується рівність: $(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(x) = \mathbf{0}$. Але якщо $x \in V_i$, то існує $y \in V$ таке, що $x = [f_i(\phi)](y)$, тоді

$$(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(x) = (\phi - \lambda_i Id)^{k_i}([f_i(\phi)](y)) = [(\phi - \lambda_i Id)^{k_i} f_i(\phi)](y).$$

За теоремою Гамільтона-Келі

$$(\phi - \lambda_i Id)^{k_i} f_i(\phi) = \chi_\phi = \mathbf{0}.$$

А тому

$$(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(x) = [(\phi - \lambda_i Id)^{k_i} f_i(\phi)](y) = \mathbf{0}(y) = \mathbf{0}.$$

2. Покажемо тепер, що простір V є сумою просторів V_1, V_2, ..., V_m:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_m. \tag{8.4.17}$$

Справді, многочлени f_1, f_2, ..., f_m взаємно прості, а тому існують такі многочлени g_1, g_2, ..., g_m, що

$$f_1 \cdot g_1 + f_2 \cdot g_2 + \ldots + f_m \cdot g_m = 1.$$

Підставивши ϕ в обидві частини рівності, отримаємо

$$f_1(\phi) \cdot g_1(\phi) + f_2(\phi) \cdot g_2(\phi) + \ldots + f_m(\phi) \cdot g_m(\phi) = Id.$$

Розглянемо довільний вектор $x \in V$. Враховуючи попередню рівність маємо:

$$\begin{aligned} x = Id(x) &= [f_1(\phi) \cdot g_1(\phi) + f_2(\phi) \cdot g_2(\phi) + \ldots + f_m(\phi) \cdot g_m(\phi)](x) = \\ &= [f_1(\phi) \cdot g_1(\phi)](x) + [f_2(\phi) \cdot g_2(\phi)](x) + \ldots + [f_m(\phi) \cdot g_m(\phi)](x) = \\ &= \psi_1(g_1(\phi)(x)) + \psi_2(g_2(\phi)(x)) + \ldots + \psi_m(g_m(\phi)(x)). \end{aligned}$$

Позначимо $y_i = \psi_i(g_i(\phi)(x))$. Але $Im\psi_1 = V_i$, а тому вектор x можна представити у вигляді суми:

$$x = y_1 + y_2 + \ldots + y_m, \quad y_i \in V_i, \ 1 \le i \le m.$$

Отже рівність (8.4.17) доведена.

3. Доведемо, що простір V є прямою сумою просторів V_1, V_2, ..., V_m:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_m.$$

Для цього достатньо показати, що

$$V_i \cap (V_1 + V_2 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m) = \mathbf{0}.$$

Нехай $y \in V_i \cap (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m)$. Оскільки $y \in V_i$, то існує таке $x \in V$, що $\psi_i(x) = y$, а тому $(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(y) = \mathbf{0}$. Оскільки $y \in (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m)$, то за п.2 існують такі $y_i \in V_i$, що $y = \sum_{j \neq i} y_j$. Тоді

$$f_i(\phi)(y) = f_i(\phi)(\sum_{j \neq i} y_j) = \prod_{l \neq i}((\phi - \lambda_i Id)^{k_l}(\sum_{j \neq i} y_j)) =$$
$$= \sum_{j \neq i}(\prod_{l \neq i}(\phi - \lambda_i Id)^{k_l}(y_j)) = \sum_{j \neq i} \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Оскільки многочлени $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ і $f_i(\lambda)$ взаємнопрості, то існують такі многочлени $g(\lambda)$ і $h(\lambda)$, що

$$(\lambda - \lambda_i)^{k_i} \cdot g(\lambda) + f_i(\lambda) \cdot h(\lambda) = 1,$$

а отже справедливою є рівність для лінійних операторів:

$$(\phi - \lambda_i Id)^{k_i} \cdot g(\varphi) + f_i(\varphi) \cdot h(\phi) = Id.$$

А тому для вектора y справедливий такий ланцюг рівностей:

$$y = Id(y) = [(\phi - \lambda_i Id)^{k_i} \cdot g(\varphi) + f_i(\varphi) \cdot h(\phi)](y) =$$
$$= [(\phi - \lambda_i Id)^{(k_i)} \cdot g(\varphi)](y) + [f_i(\varphi) \cdot h(\phi)](y) = g(\varphi)[(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(y)] + h(\phi)[f_i(\varphi)(y)] =$$
$$= g(\varphi)(\mathbf{0}) + h(\phi)(\mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Тобто перетин підпросторів $V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m$ і V_i містить тільки вектор $\mathbf{0}$.

4. Покажемо, що $V_i = V(\lambda_i)$. Враховуючи п.1, досить показати, що кореневий підпростір $V(\lambda_i)$ є підпростором V_i.

Нехай $y \in V(\lambda_i)$. Оскільки простір V є прямою сумою просторів V_1, V_2, ..., V_m, то існують $x \in V_i$ і $z \in (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m)$ такі, що $y = x + z$. За доведеним вище в п.1 $y - x \in V(\lambda_i)$, а тому $z = y - x \in V(\lambda_i)$. Отже $(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(z) = \mathbf{0}$. Крім того, оскільки $z \in (V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m)$, то $f_i(z) = 0$. Як уже зазначалося, многочлени $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ і $f_i(\lambda)$ взаємно прості, а тому існують такі многочлени $g(\lambda)$ і $h(\lambda)$, що

$$(\lambda - \lambda_i)^{k_i} \cdot g(\lambda) + f_i(\lambda) \cdot h(\lambda) = 1.$$

Звідки

$$z = Id(z) = [(\phi - \lambda_i Id)^{k_i} \cdot g(\varphi) + f_i(\varphi) \cdot h(\phi)](z) =$$
$$= [(\phi - \lambda_i Id)^{(k_i)} \cdot g(\varphi)](z) + [f_i(\varphi) \cdot h(\phi)](z) = g(\varphi)[(\phi - \lambda_i Id)^{k_i}(z)] + h(\phi)[f_i(\varphi)(z)] =$$
$$= g(\varphi)(\mathbf{0}) + h(\phi)(\mathbf{0}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

А тому $y = x \in V_i$. Таким чином, $V(\lambda_i) \subseteq V_i$ і теорема повністю доведена. $\square$

Наслідок 8.4.1. *Якщо характеристичний многочлен лінійного оператора ϕ розкладається на лінійні множники, то лінійний оператор ϕ розкладається в пряму суму лінійних операторів, кожен з яких має тільки одне власне число.*

8.4.4 Теорема Жордана.

Теорема 8.4.4 (Жордана). *Нехай ϕ лінійний оператор, заданий у скінченовимірному просторі над полем $\mathbb{C}$. тоді в деякому базисі матриця лінійного оператора ϕ має жорданову нормальну форму, причому ця форма єдина з точністю до перестановки діагональних блоків.*

Доведення. 1. Покажемо спочатку, що для лінійного оператора ϕ існує жорданів базис. За основною теоремою алгебри многочлен $f(x)$ з коефіцієнтами з поля $\mathbb{C}$ розкладається на лінійні множники. Тому для характеристичного многочлена $\chi_\phi(\lambda)$ лінійного оператора ϕ, що заданий у скінченовимірному просторі V над полем $\mathbb{C}$, виконується рівність

$$\chi_\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{k_m}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \ 1 \le i \le m.$$

За теоремою (8.4.3) це означає, що

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \ldots V(\lambda_m),$$

при цьому $V(\lambda_i)$, $1 \le i \le m$, є кореневим підпростором. Оскільки кореневі підпростори є інваріантними, то лінійний оператор ϕ можна представити у вигляді прямої суми лінійних операторів:

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m,$$

де $\phi_i = \phi|_{V(\lambda_i)}$ — звуження оператора ϕ на простір $V(\lambda_i)$, і кожен оператор ϕ_i має єдине власне число λ_i, $1 \le i \le m$.

Розглянемо оператор $\phi_i - \lambda_i Id$, $1 \le i \le m$. Оскільки $V(\lambda_i)$ є кореневим підпростором, і ϕ_i має єдине власне число λ_i, то оператор $\phi_i - \lambda_i Id$ є нільпотентним на $V(\lambda_i)$. За теоремою Жордана для нільпотентного оператора в підпросторі $V(\lambda_i)$ існує жорданів базис f_{1i}, f_{2i}, …, $f_{k_i i}$ для $\phi_i - \lambda_i Id$. Нехай в цьому базисі матриця оператора $\phi_i - \lambda_i Id$ має вигляд

$$J_i = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
J_{l_1}(0) & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline
0 & J_{l_2}(0) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & J_{l_3}(0) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & J_{l_p}(0)
\end{array}\right).$$

Покажемо, що базис f_{1i}, f_{2i}, …, $f_{k_i i}$ є жордановим і для ϕ_i. Справді, якщо в деякому базисі простору $V(\lambda_i)$ матриця A є матрицею лінійного оператора ϕ_i, то матрицею оператора $\phi_i - \lambda_i Id$ є матриця $A - \lambda_i E$. Якщо $A - \lambda_i E = J_i$, то $A = \lambda_i E + J_i$, а це і означає, що базис f_{1i}, f_{2i}, ..., $f_{k_i i}$ — жорданів для ϕ_i.

Об'єднаємо жорданові базиси звужень ϕ на кореневі підпростори $V(\lambda_i)$: f_{11}, f_{21}, ..., $f_{k_i 1}$, ..., f_{1m}, f_{2m}, ..., $f_{k_i m}$. Оскільки

$$\phi = \phi_1 \oplus \phi_2 \oplus \ldots \oplus \phi_m,$$

то отриманий базис є жордановим для лінійного оператора ϕ.

2. Тепер доведемо єдиність розкладу. Оскільки кореневі підпростори визначені однозначно, то досить довести, що в жордановій нормальній формі оператора ϕ для кожного його власного числа λ однозначно визначеною є кількість клітин Жордана з числом λ кожного розміру. Тому можна вважати, що λ — єдине власне число лінійного оператора ϕ, причому $\lambda = 0$. Нехай в жордановій нормальній формі такого лінійного оператора ϕ s_1 клітин Жордана розміру 1, s_2 — розміру 2, ..., s_q — розміру q, де q — найбільший порядок клітин Жордана у жордановій нормальній формі ϕ. Зауважимо, що для довільної клітини Жордана $J_k(0)$ розміру k $rank(J_k(0)) = k - 1$, $rank(J_k^2(0)) = k - 2$, ..., $rank(J_k^t(0)) = k - t$, якщо $1 \le t \le k$, і $rank(J_k^t(0)) = 0$, якщо $t > k$. Нехай A — матриця лінійного оператора ϕ в деякому базисі, J — його жорданова нормальна форма. Оскільки для матриць A і J існує невироджена матриця C така, що $C^{-1}AC = J$, то $rank(A^t) = rank J^t$. Позначимо $r_t = rank(A^t)$, тоді

$$\sum_{i=t}^{q} s_i = r_{t-1} - r_t,$$

$$\sum_{i=t+1}^{q} s_i = r_t - r_{t+1}.$$

Віднімемо від першої рівності другу, і отримаємо: $s_t = r_{t-1} + r_{t+1} - 2r_t$. Отже, кількість клітин Жордана s_t розміру t не залежить від вибору жорданової бази. Теорема доведена.

$\square$

8.5 Лінійні оператори в унітарних та евклідових просторах.

Теорема 8.5.1. *Для будь-якого оператора ϕ в унітарному (евклідовому) просторі V існує єдиний оператор ϕ^* такий, що*

$$\forall u, v \in V \qquad (\phi(u), v) = (u, \phi^*(v)). \tag{8.5.18}$$

Доведення. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n$– ортонормований базис простору V і нехай (α_{ij})– матриця оператора ϕ в цьому базисі. Будемо шукати вид матриці (β_{ij}) оператора ϕ^*, для якого виконується умова (8.5.18). Покладемо в цій умові $u = e_j, \;\; v = e_k$ і отримуємо:

$$(\phi(e_j), e_k) = (e_j, \phi^*(e_k)) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, e_k\right) = \left(e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} e_i\right)$$

Враховуючи лінійність скалярного добутку по першому аргументу і напівлінійність по другому отримуємо

$$(\phi(e_j), e_k) = (e_j, \phi^*(e_k)) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \left(e_i, e_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta_{ik}} \left(e_j, e_i\right).$$

Згадаємо, що базис ортонормований, а отже в лівій та правій частинах рівності буде лише по одному ненульовому доданку, тобто

$$(\phi(e_j), e_k) = (e_j, \phi^*(e_k)) \Leftrightarrow \alpha_{kj} = \overline{\beta_{jk}}$$

Остання рівність однозначно визначає матричні елементи

$$\beta_{jk} = \overline{\alpha_{kj}}.$$

Оскільки, лінійний оператор повністю визначається своєю дією на елементах базису, то цим оператор ϕ^* визначений однозначно. Перевірку того, що рівність (8.5.18) має місце для всіх векторів u, v, а не тільки для базисних, залишаємо читачу. $\square$

Означення 8.5.1. *Оператор ϕ^*, для якого має місце* (8.5.18)*, називається* **спряженим** *до оператора ϕ.*

Наслідок 8.5.1. *Якщо A_ϕ– матриця оператора ϕ в ортонормованому базисі, то для матриці A_{ϕ^*} спряженого оператора в цьому ж базисі має місце*

$$A_{\phi^*} = \overline{A_\phi^T}, \tag{8.5.19}$$

де риска зверху означає процедуру спряження, застосовану до всіх матричних елементів. Зокрема, в евклідових просторах будемо мати

$$A_{\phi^*} = A_\phi^T. \tag{8.5.20}$$

Наступні властивості спряжених операторів пропонуємо довести самостійно.

Лема 8.5.1.

$$(\phi^*)^* = \phi;$$
$$(\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^*;$$
$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*.$$

Лема 8.5.2. *Якщо $W \subset V$ підпростір унітарного (евклідового) простору інваріантний при дії оператора ϕ, ортогональне доповнення $W^{\perp}$ є інваріантним при дії спряженого оператора ϕ^*.*

Доведення. Нехай $w \in W$ і $u \in W^{\perp}$, тоді

$$(w, \phi^*(u)) = (\phi(w), u) = 0.$$

Остання рівність випливає з того, що $\phi(w) \in W$. Звідки $\phi^*(u) \perp W$, тобто $\phi^*(u) \in W^{\perp}$. □

8.5.1 Ортогональні та унітарні оператори.

Означення 8.5.2. *Оператор ϕ в евклідовому (унітарному) просторі V називається* **ортогональним (унітарним)***, якщо він зберігає скалярний добуток, тобто має місце*

$$\forall v, w \in V \quad (\phi(v), \phi(w)) = (v, w).$$

З означення випливає, що ортогональні (унітарні) оператори в скінченновимірних просторах є оборотними та зберігають відстані та кути між векторами.

Лема 8.5.3. *Спектр ортогонального (унітарного) оператора складається з власних чисел, модуль яких дорівнює одиниці.*

Доведення. Доведення пропонуємо провести самостійно. □

Теорема 8.5.2. *Оператор ϕ в унітарному (евклідовому) просторі V є унітарним (ортогональним) тоді і тільки тоді, коли існує ортонормований базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ такий, що його образ - сукупність векторів $\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)$ утворюють ортонормований базис також.*

Доведення. $\Rightarrow$. Якщо оператор ϕ є ортогональним (унітарним), то він зберігає відстані і кути між векторами, а отже образ будь-якого ортонормованого базиса буде ортонормованим базисом.

$\Leftarrow$. Припустимо, що для деякого ортонормованого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ його образ $\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)$ є також ортонормованим базисом. Нехай вектори v, w мають координати $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\quad (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в базисі $e_1, e_2, \ldots, e_n$, тобто $v = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad w = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, тоді, враховуючи ортонормованість, маємо $(v, w) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. З іншого боку,

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i), \quad \phi(w) = \sum_{i=1}^{n} y_i \phi(e_i),$$

тобто $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\quad (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ будуть координатами векторів $\phi(v), \phi(v)$ в ортонормованому базисі $\phi(e_1), \phi(e_2), \ldots, \phi(e_n)$, звідки

$$(\phi(v), \phi(w)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (v, w),$$

тобто оператор ϕ зберігає скалярний добуток. $\square$

Теорема 8.5.3. *Для ортогонального (унітарного) оператора ϕ має місце*

$$\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi = Id,$$

тобто оператор обернений до ϕ збігається зі спряженим:

$$\phi^{-1} = \phi^*.$$

Доведення. Для довільних векторів $v, w \in V$ маємо

$$(v, w) = (\phi(v), \phi(w)) = (v, \phi^*(\phi(w))),$$

звідки за лінійністю по другому аргументу маємо

$$0 = (v, \phi^*(\phi(w)) - w) = (v, (\phi^* \circ \phi - Id)(w)).$$

Ця рівність має виконуватись для довільного вектора v, зокрема для $v = (\phi^* \circ \phi - Id)(w)$, тобто маємо рівність нулю скалярного квадрата

$$((\phi^* \circ \phi - Id)(w), (\phi^* \circ \phi - Id)(w)) = 0,$$

звідки $\forall w \in V \quad (\phi^* \circ \phi - Id)(w) = \mathbf{0}$, що можливо лише коли $\phi^* \circ \phi - Id$ є нульовим оператором, тобто $\phi^* \circ \phi - Id = \mathbf{0}$, звідки $\phi^* \circ \phi = Id$. Заміняючи в попередніх міркуваннях $\phi \leftrightarrow \phi^*$ отримуємо, рівність $\phi \circ \phi^* = 1d$. $\square$

Наслідок 8.5.2. *Матриця A_ϕ ортогонального (унітарного) оператора ϕ має таку властивість*

$$A_\phi^{-1} = A_\phi^T \quad \left(A_\phi^{-1} = \overline{A_\phi^T}\right).$$

Доведення. Доведення випливає з попередньої теореми і наслідку 8.5.1. $\square$

Означення 8.5.3. *Матриці, які задовольняють вищенаведеним рівностям називаються* **ортогональними**, *відповідно* **унітарними**.

Лема 8.5.4. *Стовпчики (рядки) ортогональної або унітарної матриці утворюють ортонормований базис арифметичного векторного простору, як стандартної моделі евклідового, відповідно унітарного векторного простору.*

Доведення. Доведення випливає з означення і пропонуємо провести його самостійно. $\square$

8.5.2 Нормальні оператори.

Означення 8.5.4. *Оператор $\phi \in End_{\mathbb{F}}(V)$ називається самоспряженим, якщо*

$$\phi^* = \phi.$$

З означення випливає, що матриця самоспряженого оператора в евклідовому просторі має бути симетричною:

$$A_\phi = A_\phi^T,$$

а в унітарному просторі для неї має виконуватись рівність:

$$A_\phi = \overline{A_\phi^T};$$

такі матриці називаються **ермітовими**.

Означення 8.5.5. *Оператор $\phi \in End_{\mathbb{F}}(V)$ називається* **нормальним** *якщо віг комутує зі своїм спряженим, тобто має місце*

$$\phi \circ \phi^* = \phi^* \circ \phi$$

Ортогональні (унітарні) та самоспряжені оператори в евклідовому (унітарному) просторі є очевидно прикладами нормальних операторів.

Теорема 8.5.4. *Якщо $\lambda-$ власне число нормального оператора ϕ, то $\overline{\lambda}-$ спряжене до нього буде власним числом спряженого оператора ϕ^*.*

Доведення. Нехай $v-$ власний вектор оператора ϕ, що відповідає власному числу λ, тобто для нього маємо $\phi(a) = \lambda a$. Тоді будемо мати

$$(v, \phi^*(v)) = (\phi(v), v) = (\lambda v, v) = \lambda(v, v) = (v, \overline{\lambda} v),$$

звідки

$$\left(v, \left(\phi^* - \overline{\lambda} Id\right)(v)\right) = 0.$$

З іншого боку

$$(\phi^*(v), \phi^*(v)) = (\phi(\phi^*(v)), v) = (\phi^*(\phi(v)), v) = (\phi^*(\lambda v), v) = (\phi^*(v), \overline{\lambda} v),$$

звідки

$$\left(\phi^*(v), \left(\phi^*(v) - \overline{\lambda} Id\right)(v)\right) = 0$$

Віднімання від цієї рівності попередньої помноженої на $\overline{\lambda}$ дає наступну рівність:

$$\left(\left(\phi^*(v) - \overline{\lambda} Id\right)(v), \left(\phi^*(v) - \overline{\lambda} Id\right)(v)\right) = 0,$$

і з умови невиродженості скалярного добутку отримуємо:

$$\phi^*(v) - \overline{\lambda} v = \mathbf{0}.$$

□

Наслідок 8.5.3. *Спектр самоспряженого оператора в евклідовому (унітарному) просторі складається з дійсних чисел, зокрема власні числа симетричної матриці є дійсними.*

Доведення. Дійсно, для власного вектора v самоспряженого оператора будемо мати

$$\lambda v = \phi(v) = \phi^*(v) = \overline{\lambda} v,$$

звідки, $(\lambda - \overline{\lambda})v = \mathbf{0}$. Оскільки вектор v ненульовий, то $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$. □

Теорема 8.5.5. *(Основна теорема про нормальні оператори в унітарному просторі.)*

Для будь-якого нормальний оператора в унітарному просторі існує ортогональний базис простору, що складається з власних векторів цього оператора, зокрема нормальний оператор є діагоналізовним.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції по розмірності унітарного векторного простору V.

База індукції $\dim V = 1$ є очевидною.

Індукційний крок. Оскільки над будь-який многочлен (зокрема характеристичний) над полем комплексних чисел має корінь, то оператор ϕ має одновимірний інваріантний підпростір U, що відноситься до власного числа $\lambda \in \mathbb{C}$. Нехай $U^{\perp}-$ ортогональне доповнення, тоді згідно леми 7.2.2 маємо

$$V = U \oplus U^{\perp},$$

при цьому, згідно леми 8.5.2, підпростір $U^{\perp}$ є інваріантним при дії спряженого оператора ϕ^*. З іншого боку оператор ϕ^* (як і ϕ) є нормальним і за попередньою теоремою U є власним підпростором і для спряженого оператора ϕ^*, але тоді за лемою 8.5.2, ортогональне доповнення $U^{\perp}$ буде інваріантним підпростором і для оператора $(\phi^*)^* = \phi$. Отже, підпростір $U^{\perp}$ є інваріантним при дії оператора ϕ. За припущенням індукції, в ньому існує базис з власних векторів оператора ϕ, додавши довільний ненульовий вектор з підпростору U, отримаємо потрібний базис всього простору. □

Теорема 8.5.6. *(Класифікація нормальних операторів в дійсному просторі.)*

Для будь-якого нормального оператора в дійсному евклідовому просторі існує ортогональний базис в якому матриця оператора має вигляд:

$$\begin{pmatrix}
r_1\cos\alpha_1 & r_1\sin\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-r_1\sin\alpha_1 & r_1\cos\alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & r_2\cos\alpha_2 & r_2\sin\alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & -r_2\sin\alpha_2 & r_2\cos\alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & r_k\cos\alpha_k & r_k\sin\alpha_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -r_k\sin\alpha_k & r_k\cos\alpha_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & s_1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & s_2 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_l
\end{pmatrix}, \tag{8.5.21}$$

де $r_i > 0, s_j$- *дійсні числа,* $(i = 1, 2, \dots, k,\ j = 1, 2, \dots, l)$, *а* $\alpha_i \in (0, 2\pi)-$ *кути поворотів.*

Доведення. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n-$ ортонормований базис простору $V(\mathbb{R})$ і $A-$ матриця оператора ϕ. Розглянемо арифметичний векторний простір $\mathbb{C}^n$ як стандартну модель унітарного простору. Розглянемо оператор $\widehat{\phi}$ в цьому просторі матриця якого в канонічному базисі збігається з A. Згідно основної теореми про нормальні оператори існує ортогональний базис з власних векторів цього оператора. Оскільки коефіцієнти матриці A є дійсними числами, то коефіцієнти характеристичного рівняння будуть дійсними, а отже якщо $\lambda \in Spec\widehat{\phi}$, то $\overline{\lambda} \in Spec\widehat{\phi}$. Крім того, якщо $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)-$ власний вектор, що відповідає власному числу λ, то приймаючи до уваги, що

$$A\overline{\mathbf{z}} = \overline{A\mathbf{z}} = \overline{\lambda\mathbf{z}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{z}},$$

приходимо до висновку, що спряжений вектор $\overline{z}$ є також власним вектором цього оператора, що відповідає власному числу $\overline{\lambda}$. Зауважимо, що якщо

$$z_j = x_j + iy_j,\quad \overline{z}_j = x_j - iy_j, j = 1, 2, \dots, n,$$

то маємо дійсні числа

$$x_j = \frac{1}{2}(z_j + \overline{z}_j),\quad y_j = \frac{1}{2i}(z_j - \overline{z}_j),$$

а отже, вектори

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}),\quad \mathbf{y} = \frac{1}{2i}(\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}})$$

мають дійсні координати. На ці вектори оператор діє наступним чином:

$$A\mathbf{x} = A\frac{1}{2}(\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}(\lambda\mathbf{z} + \overline{\lambda}\overline{\mathbf{z}});$$

$$A\mathbf{y} = A\frac{1}{2i}(\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2i}(\lambda\mathbf{z} - \overline{\lambda}\overline{\mathbf{z}}).$$

Нехай $\lambda = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$. Згадаємо з шкільного курсу математики метод введення допоміжного кута при розв'язанні тригонометричних рівнянь. Діючи по аналогії з ним маємо

$$\lambda = a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right).$$

Покладемо $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ і введемо в розгляд кут α для якого

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Підстановка $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ в отримані вище формули дає

$$A\mathbf{x} = \frac{r}{2}\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)\mathbf{z} + (\cos\alpha - i\sin\alpha)\overline{\mathbf{z}}\right) = r\left(\cos\alpha\frac{\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}}{2} - \sin\alpha\frac{\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}}{2i}\right) =$$
$$= r\cos\alpha \cdot \mathbf{x} - r\sin\alpha \cdot \mathbf{y}. \quad (8.5.22)$$

$$A\mathbf{y} = \frac{r}{2i}\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)\mathbf{z} - (\cos\alpha - i\sin\alpha)\overline{\mathbf{z}}\right) = r\left(\sin\alpha\frac{\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}}{2} + \cos\alpha\frac{\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}}}{2i}\right) =$$
$$= r\sin\alpha \cdot \mathbf{x} + r\cos\alpha \cdot \mathbf{y}. \quad (8.5.23)$$

Тепер можна записати матрицю звуження оператора на інваріантний підпростір $\mathcal{L}(\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в базисі $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} r\cos\alpha & r\sin\alpha \\ -r\sin\alpha & r\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Якщо для кожного комплексного числа λ в двовимірному просторі породженому власному векторами $\mathbf{z}, \overline{\mathbf{z}}$ переобрати базис і взяти вектори $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ з дійсними координатами, то матриця оператора в цьому базисі набуде потрібного вигляду. $\square$

8.6 Зведення квадратичної форми до головних осей

Теорема 8.6.1. *Для довільної білінійного симетричного функціонала визначеного на унітарному (евклідовому) просторі існує ортогональний базис в якому цей функціонал задається білінійною формою, що має діагональний вигляд:*

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i,$$

$a_i \in \mathbb{R}$. *В цьому базисі відповідна квадратична форма набуває вигляду:*

$$Q(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Доведення. Нехай $e_1, e_2, \ldots, e_n-$ який не будь ортонормований базис. Відповідна білінійна симетрична форма в цьому базисі буде мати вигляд:

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{y},$$

де $A-$ симетрична матриця. Розглянемо A, як матрицю самоспряженого оператора у вказаному базисі. За основною теоремою про нормальні оператори, існує ортонормований базис $u_1, u_2, \ldots, u_n$ в якому матриця D цього оператора є діагональною. При цьому, оскільки власні числа самоспряженого оператора (симетричної матриці) є дійсними числами (див. наслідок 8.5.3), то вказана матриця є діагональною над полем $\mathbb{R}$, та і координати векторів u_i в початковому базисі e_i є також дійсними базисі.

За теоремою 8.5.2, матриця C переходу від базису e_i до базису u_i є ортогональною, тобто має місце $C^{-1} = C^T$, звідки

$$D = C^{-1}AC = C^T AC.$$

Порівнюючи з формулами (6.1.4) приходимо до висновку, що білінійна форма $\mathbf{x}'^T D\mathbf{y}'$ еквівалентна формі $S(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, а квадратична форма $\mathbf{x}'^T D\mathbf{x}'$ еквівалентна формі $Q(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Цим доведення завершено. □

Для білінійних симетричних форм в довільному векторному просторі маємо такий наслідок.

Теорема 8.6.2. *Для довільної пари білінійних симетричних форм, одна з яких додатно визначена, існує базис векторного простору в якому вони обидві набувають діагонального виду.*

Доведення. Розглянемо векторний простір як евклідів відносно вказаної білінійної додатно визначеної форми. Тоді інша форма може бути зведена до головних осей, тобто до діагонального виду в ортонормованому базисі. Ну а білінійна форма, що відповідає введеному скалярному добутку в цьому базисі набуде вигляду

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

□

8.7 Зведення квадрик до канонічного вигляду.

Квадрикою називають афінний многовид, який є гіперповерхнею, що задається рівнянням:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + b_0 = 0,$$

де $a_{ij}-$ симетрична матриця.

Будемо вважати, що вказане рівняння визначає многовид в ортонормованому базисі. Зведення до канонічного вигляду відбувається в два етапи:

1. Будується ортонормований базис в якому квадратична форма

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

набуває діагонального вигляду, а рівняння квадрики буде мати простішу форму :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i' x_i' + b_0 = 0,$$

де λ_i- власні числа матриці (a_{ij}). Оскільки $\mathbf{x} = C\mathbf{x}'$, де $C-$ ортогональна матриця, стовпчиками якої є координати власних векторів матриці (a_{ij}) в початковому базисі, то для коефіцієнтів b_i' будемо мати формули:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j' = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i c_{ij}\right) x_j',$$

звідки

$$b_j' = \sum_{i=1}^{n} b_i c_{ij}.$$

2. Для кожного i такого, що $\lambda_i \neq 0$, виділити повний квадрат - $\lambda_i x_i^2 + b_i' x_i = \lambda_i(x_i' + r_i)^2 + s_i$; виконати перенесення початку координат, тобто зробити заміну $x_i' + r_i = x_i'', i = 1, 2, \ldots, n$. Якщо всі $\lambda_i \neq 0$, то отримаємо таке рівняння квадрики

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i''^2 = c.$$

в новій системі координат. В тривимірному просторі будемо мати

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = c.$$

Отже, можна побудувати ортонормований базис, в якому квадрика набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i x_i = c \tag{8.7.24}$$

Класифікація кривих другого порядку на евклідовій площині.

Описаним вище методом приведення квадрики на площині до головних осей ми можемо отримати:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = c$$

або

$$\lambda_1 x_1^2 + \alpha x_2 = c$$

В першому випадку, якщо λ_1, λ_2 одного знаку, а $c \neq 0$ то маємо еліпс: дійсний, якщо знак c збігається зі знаком λ_i і уявний в протилежному випадку. При $c = 0$ еліпс вироди́ться в точку.

Якщо ж λ_1, λ_2 мають протилежні знаки, а $c \neq 0$, то маємо гіперболу. При $c = 0$, отримуємо пару прямих, що перетинаються в точці.

В другому випадку, якщо $\alpha \neq 0$, то маємо параболу, а при $\alpha = 0, \neq 0$ маємо або пару паралельних прямих, якщо λ_1 і c одного знаку, і порожню множину в протилежному випадку. Якщо ж $\alpha = 0$ і $c = 0$, то отримуємо подвійну пряму.

Класифікація поверхонь другого порядку в тривимірному евклідовому просторі.

1.1. Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ і $c < 0$, то маємо **уявний еліпсоід**;

1.2 Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ і $c > 0$, то маємо **дійсний еліпсоід**;

1.3 Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ мають однаковий знак і $c = 0$, то маємо точку (уявний конус).

1.4 Якщо $c > 0$ і одне з чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ відємне, а два інших додатні, то маємо **однопорожнинний гіперболроід**;

1.5 Якщо $c > 0$ і серед чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одне додатне, а два інших відємні, то маємо **двопорожнинний гіперболроід**;

1.6 Якщо $c = 0$ і серед чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ є числа різних знаків, то маємо дійсний **конус**;

2. Якщо рівняння поверхні має вигляд

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + az = c,$$

то отримаємо такі три випадки:

2.1 $a \neq 0$, і λ_1, λ_2 мають однакові знаки, то маємо **еліптичний параболоід**.

2.2 $a \neq 0$, і λ_1, λ_2 мають різні знаки, то маємо **гіперболічний параболоід**.

2.3 $a = 0$, то маємо циліндричну поверхню - **еліптичний циліндр** якщо числа c, λ_1, λ_2 однакового знаку і **гіперболічний циліндр** в протилежному випадку. Якщо ж $a = c = 0$, то маємо точку, якщо λ_1, λ_1 мають однакові знаки і пару площин що перетинаються в протилежному випадку.

3. Для рівняння поверхні

$$\lambda_1 x^2 + ay + bz = c.$$

отримаємо такі три випадки:

3.1 Якщо принаймні одне з чисел a, b відмінне від нуля, то зробимо ортогональну заміну

$$x' = x,$$

$$y' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}z$$

,

$$z' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}z$$

, після якої отримаємо рівняння

$$\lambda_1 x'^2 + \sqrt{a^2+b^2}y' = c,$$

яке є рівнянням **параболічного циліндра**.

3.2 Рівняння $\lambda_1 x^2 = c$ є рівнянням пари паралельних площин, якщо c і λ_1 мають однакові знаки, пара уявних паралельних площин, якщо знаки різні, а якщо $c = 0$, то маємо площину $x = 0$ (пара площин, що збігаються.)

8.8 Задачі

1. Довести, що поворот тривимірного векторного простору на кут $\frac{2\pi}{3}$ відносно прямої $x_1 = x_2 = x_3$ є лінійним перетворенням і знайти матрицю цього перетворення в канонічному базисі e_1, e_2, e_3.

2. Довести, що проектування простору $\mathbf{R}^3$ на координатну вісь вектора e_1 паралельно координатній площині векторів e_2 і e_3 є лінійним перетворенням, і знайти його матрицю в базисі e_1, e_2, e_3.

3. Довести, що проектування простору $\mathbf{R}^3$ на координатну площину векторів e_1 і e_2 паралельно осі координат вектора e_3 є лінійним перетворенням, і знайти його матрицю в базисі e_1, e_2, e_3.

4. З'ясувати, чи є наступні перетворення лінійними, якщо є, то знайти ядро, образ та матрицю лінійного перетворення (для скінченновимірних просторів) в базисі, в якому задані координати вектора x.

   a) $x \longmapsto a$ ($x \in \mathbf{R^n}$, a— фіксований вектор);

   b) $x \longmapsto x + a$ ($x \in \mathbf{R^n}$, a— фіксований вектор);

   c) $x \longmapsto \alpha x$ ($x \in \mathbf{R^n}$, α— фіксований скаляр);

   d) $f(x) \longmapsto f^{(4)}(x)$ ($f(x) \in R[x]_n$);

   e) $f(x) \longmapsto f(x+1) - f(x)$ ($f(x) \in R[x]_n$);

f) $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_1 + x_3, x_1 + 5x_3, x_2)$;

g) $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 + x_3, x_1 + 5, x_3)$;

h) $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (6x_2 + 7x_3, 0, x_1)$;

i) $(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2 + 5x_1^2, x_1 + x_3)$.

5. Довести, що довільний лінійний оператор будь-яку лінійно залежну систему векторів відображає у лінійно залежну систему векторів.

6. Лінійне перетворення φ в базисі e_1, e_2, e_3, e_4, задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю цього перетворення в базисі:

a) e_4, e_2, e_3, e_1;

b) $e_1 + e_2$, $e_1 + e_2 + e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, e_4.

c) $2e_1 + 3e_2 + e_3$, $3e_1 - e_2 + e_3$, $2e_2 + e_3 - 2e_4$, $e_1 + e_4$.

7. Оператору φ в базисі $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ відповідає матриця A_φ, а оператору ψ в базисі $b_1 = (2, 1)$, $b_2 = (3, 2)$ відповідає матриця B_ψ. Визначити матрицю оператора $\varphi + \psi + \varphi\psi$ в базисі a_1, a_2, якщо $A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B_\psi = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$.

8. Оператору φ в базисі $a_1 = (1, 2)$, $a_2 = (2, 3)$ відповідає матриця A_φ, а оператору ψ в базисі $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (3, 2)$ відповідає матриця B_ψ. Визначити матрицю оператора $\varphi + \psi + \varphi\psi$ в базисі b_1, b_2, якщо $A_\phi = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

9. З'ясувати, чи можна звести матрицю лінійного оператора до діагонального вигляду і, якщо можна, то вказати матрицю переходу до власного базису

$$a) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Доведіть, що сума двох діагоналізовних матриць не обов'язково є діагоналізовною матрицею.

11. Доведіть, що довільний многочлен від діагоналізовної матриці є діагоналізовною матрицею.

12. Знайти ЖНФ і жорданів базис оператора, заданого матрицею

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad e) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad f) \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$g) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad h) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad i) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

13. Довести, що для довільної невиродженої матриці A існує така матриця X, що $X^2 = A$.

14. Обчислити A^{222}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

15. Обчислити A^{300}, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.

16. Обчислити $\sqrt{A}$, якщо $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.

17. Обчислити $\sin A$, якщо $A = \begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$.

18. Знайти матрицю лінійного перетворення φ^*, спряженого до перетворення φ, в базисі f_1, f_2, f_3, якщо $f_1 = (1,2,1)$, $f_2 = (1,1,2)$, $f_3 = (1,1,0)$ і перетворення φ в цьому базисі задається матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

19. Знайти матрицю лінійного перетворення φ^*, спряженого до перетворення φ, в базисі f_1, f_2, f_3, якщо $f_1 = (1,1,1)$, $f_2 = (1,1,0)$, $f_3 = (1,0,0)$ і перетворення φ в цьому базисі задається матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

20. Знайти канонічний вид ортогонального перетворення і базис, в якому ортогональне перетворення має канонічний вид. Визначити тип перетворення.

$$a)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \qquad b)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{6} \\ \frac{1}{4}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

21. Довести, що добуток $\varphi\psi$ двох самоспряжених операторів φ і ψ буде самоспряженим оператором тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $\varphi\psi = \psi\varphi$.

22. Довести, що якщо φ і ψ — самоспряжені оператори, то самоспряженим також буде оператор $\varphi\psi + \psi\varphi$.

23. Довести, що для довільних операторів φ і ψ справедливі рівності
 a) $(\varphi^*)^* = \varphi$;
 b) $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
 c) $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
 d) $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$.

24. Знайти власний ортонормований базис і матрицю оператора в цьому базисі, якщо в деякому ортонормованому базисі оператор задається матрицею:

$$a)\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

25. Знайти ортогональне перетворення, що зводить наступну квадратичну форму до канонічного виду (зведення до головних осей), та виписати цей вид:

   a) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;

   b) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

   c) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

   d) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

   e) $2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$;

   f) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 - 2x_4^2$;

   g) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + x_4^2$.

26. За допомогою перетворення координат звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду і визначити, яке геометричне місце точок воно визначає:

   a) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

   b) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$

   c) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$

   d) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$

   e) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$

   f) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$

   g) $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$

Рекомендована література

[1] Калужнін Л., Вишенський В., Шуб Ц., Лінійні простори.—Київ: Вища школа, 1971.—344с.

[2] Ильин В.А., Позняк Э.Т. Линейная алгебра .— Москва: Наука, 1999.—280с.

[3] Ильин В.А., Позняк Э.Т. Аналитическая геометрия.— Москва: Наука, 1981.— 232 с.

[4] Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - Москва: Наука, 1984.— 416 с.

[5] Проскуряков И. Сборник задач по линейной алгебре.—Москва: Наука, 1984.—336 с.

[6] Збірник задач з аналітичної геометрії/ За редакцією В.В.Кириченка.— Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2005.-228 с.

[7] Кострикин А.И. Введение в алгебру. —- Москва: Наука, 1977, 496 с.

[8] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - Москва: Наука, 1971.— 304 с.