Лекція 7.

1 Теорія алгоритмів. Алгоритмічна мова Тюринга

Складові машини Тюринга

A) $A-$ зовнішній алфавіт, в якому присутній символ пропуску _;

Q) $Q-$ внутрішній алфавіт, де виділено певний елемент $q_0 \in Q(stop)$

Automata)

$$\delta : A \times Q \to A \times Q,$$

Shift)

$$Sh : A \times Q \to \{Left, Right\}$$

МТ обробляє дані написані на стрічці у зовнішньому алфівіті (один символ в одній комірці стрічки) таким чином: Якщо в стані q МТ "читає"символ $a \in A$, в певній комірці стрічки, то вона записує в цю комірку символ $a' \in A$ і переходить в стан ;$q' \in Q$, такі, що $\delta(a, q) = (a', q')$ після, того "читає"символ записаний в комірці ліворуч або праворуч від згаданої, в залежності від значення функції Sh : $Sh(a, q) = Left$ або $Sh(a, q) = Right$ відповідно.

Обчислення на МТ

Нехай МТ із зовнішнім алфавітом $A = \{0, 1, \_\}$ Якщо в початковий момент часу на стрічці МТ було записано $x = x_1x_2 \dots x_n, \quad x_i \in \{0, 1\}$ і через деякий час машина зупинилась і на стрічці записано $y = y_1y_2 \dots y_m,\ y_i \in \{0, 1\}$, то покладемо

$$\phi_{MT}(x) = y,$$

якщо ж МТне зупиняється, то будемо вважати, що значення $\phi_{MT}(x)$ не визначено.

Функції обчислювальні за Тюрингом

Для частково визначеної функції $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$ або предиката $L : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ будемо говорити, що вони обчислювальні за Тюрингом, якщо існує МТ із зовнішнім алфавітом $A = \{0, 1, \_\}$ така, що

$$f(x) = \phi_{MT}(x),\ L(x) = \phi_{MT}(x)$$

для будь-якої стрічки $x = x_1x_2 \dots x_n, \quad x_i \in \{0, 1\}$, для якої значення $f(x), L(x)$ є визначеними.

Означення 1.1. *Часовою складністю алгоритму* $\equiv MT$ *називається функція* $T_{MT}(s)$ *натурального аргумента* s*, який набуває значень довжини стрічок* $|x| = s$*, таких, що значення* $\phi_{TM}(x)$ *є визначеним, а значенням функції* $T_{MT}(s)$ *є кількість кроків, які здійснить МТ до зупинки.*

Означення 1.2. *Просторовою складністю алгоритму* $\equiv MT$ *називається функція* $S_{MT}(s)$ *натурального аргумента* s, *який набуває значень довжини стрічок* $|x| = s$, *таких, що значення* $\phi_{TM}(x)$ *є визначеним, а значенням функції* $S_{MT}(s)$ *є кількість комірок стрічцки, які були задіяні при роботі MT до зупинки.*

В задачах оцінки часової та просторової складностей важливим є не точний вигляд функції складнгості (як правило знайти короткий аналітичний вираз є неможливим), а асимптотична поведінка її при $s \to infty$. З цієї точки зору опис класу $O(h)$ до якого належить функція складності і доведення того, що функцію h не можна замінити на функцію, що зростає суттєво повільніше дає вичерпну відповідь на проблему оцінки складності даної MT (алгоритму). Нагадаємо відповідне означення.

Означення 1.3. *Нехай* $f(n), g(n)-$ *функції натурального аргумента, які набувають натуральних значень. Будемо говорити, що* $f \in O(g)$, *якщо існує константа* $C : C > 0$, *така, що*

$$\forall n \quad f(n) \leq C \cdot g(n)$$

Класи P $PSPACE$

Означення 1.4. *Будемо говорити, що MT (алгоритм) має поліноміальну часову складність* ($MT \in P$) *якщо функція* $T_{MT}(s)$ *є поліномом від* s, *тобто для деякого натурального* d *має місце* $T_{MT}(s) \in O(s^d)$.

Означення 1.5. *Будемо говорити, що MT (алгоритм) має поліноміальну просторову складність* ($MT \in PSPACE$) , *якщо функція* $S_{MT}(s)$ *є поліномом від* s, *тобто для деякого натурального* d *має місце* $S_{MT}(s) \in O(s^d)$.

Теорема 1.1. *Якщо* $MT \in P$, *то* $MT \in PSPACE$.

Класи функцій $P, PSPACE$

Означення 1.6. *Функція* $f(x)$ *(предикат* $L(x)$*) належить класу* P, *якщо існує MT яка обчислює* $f(x)$ $(L(x))$, *така, що* $MT \in P$.

Означення 1.7. *Функція* $f(x)$ *(предикат* $L(x)$*) належить класу* $PSPACE$ *якщо існує MT яка обчислює* $f(x)$ $(L(x))$, *така, що* $MT \in PSPACE$.

Теорема 1.2.

$$P \subseteq PSPACE$$

.

1.1 Недетермінована машина Тюринга

Складові недетермінованої машини Тюринга (НМТ)

А) $A-$ зовнішній алфавіт, в якому присутній символ пропуску _;

Q) $Q-$ внутрішній алфавіт, де виділено певний елемент $q_0 \in Q(stop)$

NdAutomata)
$$\Delta \subset (A \times Q) \times (A \times Q)\,,$$

NdShift)
$$NdSh \subset (A \times Q) \times \{Left, Right\}$$

Якщо в стані q НМТ "читає"символ $a \in A$, в певній комірці стрічки, то вона записує в цю комірку символ $a' \in A$ і переходить в стан ;$q' \in Q$, де (a', q') одна з пар, для якоої $((a,q),(a',q')) \in \Delta$, після, того "читає"символ записаний в комірці ліворуч або праворуч від згаданої, в залежності від того чи належать $((a,q),L)$ або $((a,q),R)$ відношенню NdSh.

Орієнтовний граф обчислень на НМТ

Edges - це пари трійок $((a_1,q_1,t)(a_2,q_2,t+1))\,, a \in A, q \in Q, t = 0,1,2,\ldots$ для яких пари $(a_1,q_1),(a_2,q_2)$ є узгодженими, тобто $((a_1,q_1),(a_2,q_2)) \in Delta$.

Vertexes- трійки $(a,q,t), a \in A, q \in Q, t = 0,1,2,\ldots$

Шлях обчислення на НМТ це шлях на графі, тобто пара вершин $(a_1,q_1,0),(a,q,T)$ і скінченна послідовність ребер, таких що перше ребро має початком вершину $(a_0,q_0,0)$, останнє ребро має кінцем (a,q,T), і пара послідовних ребер є суміжними - кінець попереднього збігіється з початком наступного. Кількість ребер в цій послідовності (довжина шляху) дорівнює T. Якщо в трійці $q = q_0$ в трійці (a,q,T), то будемо говорити, що час обчислення по даному шляху НМТ дорівнює T.

Означення 1.8. *Предикат $L = L(x)$ належить класу NP, $(L \in NP)$, якщо існує НМТ і поліном $p(s)$ такі, що якщо*

якщо $x:\ L(x) = 1$, то існує шлях обчислення з початком у вершині $(x_i,q_1,0)$ і кінцем у вершині $(1,q_0,T)$, час обчислення по якому не перевищує $p(|x|)$;

якщо $x:\ L(x) = 0$, то не існує шляху з кінцем у вершині $(1,q_0,T)$, довжини, що не перевищує $p(|x|)$, тобто такого, що $T \le p(|x|)$.

Щодо стрічок x для яких $L(x) = 0$, то можна сказати і так для всіх початкових стрічок $z = z(x)$,довжина яких не перевищує $p(|x|)$ всі шляхи на графі довжини не більше $p(|x|)$ мають кінцем або $(1,q,p(|x|)),\ q \ne q_0$ або $(0,q_0,t),\ t \le p(|x|)$.

Це означення є досить громіздким і незручним в роботі, але воно є історично першим означенням класу NP і тому ми його і наводимо першим. Значно вдалішим є предикатне означення.

Означення 1.9. *$L(x) \in NP$ якщо існує предикат $R(x,y) \in P$ і поліном $p(s)$, такі, що L має подання*
$$L(x) = \exists y\,((|y| \le q(|x|)) \wedge R(x,y)) \tag{1.1.1}$$

Означення 1.10. *Поліноміальна звідність (звідність по Карпу)*

Будемо говорити, що предикат $L_1(x)$ поліноміально зводиться до $L_2(x)$, якщо існує функція $f(x) \in P$ така, що

$$L_1(x) = L_2(f(x)). \tag{1.1.2}$$

Лема 1.1. *Якщо $L_1 \gtrsim L_2$., то*

$$L_2 \in P \ \Rightarrow L_1 \in P,$$
$$L_2 \in NP \ \Rightarrow L_1 \in NP,$$

Означення 1.11. *Предикат $\bar{L}(x)$ називається $NP-$ повним, якщо*
1) $\bar{L} \in NP$
2) $\forall\ L \in NP\ L \gtrsim \bar{L}$.

Предикат $SAT(x)$

$x-$ двійковий код формули числення висловлювань, записаної за допомогою логічних зв'язок $\neg, \wedge, \vee.$, $SAT(x) = 1$ тоді і тільки тоді, коли формула числення висловлювань, код якої є x має принаймні одну модель.

Теорема 1.3. *(Теорема Кука.)*
$SAT(x)$ є $NP-$ повним предикатом.

Доведення. Введемо в розгляд допоміжні булеві вектор-змінні в почвтковий момент часу $t = 0$.

$$z_{0,1} = code(x_i, q_1)_2, z_{0,2} = code(x_2, \emptyset)_2, \ldots, z_{0,n} = code(x_n, \emptyset)_2,$$

$$z_{0,n+1} = code(y_1, \emptyset)_2, \ldots, z_{0,n+m} = code(y_m, \emptyset)_2$$

А також допоміжні булеві вектор-змінні в момент часу t.

$$z_{t,i} = code(a, \emptyset)_2,\ a \in \{0, 1, \_\},$$

для всіх крім однієї задіяних комірок стрічки, а для неї

$$z_{t,i_0} = code(a, q)_2,\ a \in \{0, 1, \_\}, q \in Q$$

Довжини значень вектор-змінних є однаковими $|z_{t,i}| = \zeta$, залежать лише від кількостей символів у внутрішньому та зовнішньому алфавітах МТ і не залежать від розміру вхідних даних.

Протокол роботи МТ

При роботі МТ з конкретною стрічкою x, y через T кроків, всі булеві вектор-змінні $z_{t,i}, 0 \le t \le T, 1 \le i \le l_t = |x| + p(|x|) + t.$ набудуть конкретних значень.

Важливе зауваження: значення змінних в комірці однозначно визначені змістом трьох комірок вище.

час	код	...	код	код	код	...	код
0	$z_{0,1}$	...	$z_{0,k-1}$	$z_{0,k}$	$z_{0,k+1}$	...	z_{0,l_0}
1	$z_{1,1}$	...	$z_{1,k-1}$	$z_{1,k}$	$z_{1,k+1}$	...	z_{1,l_1}
2	$z_{2,1}$	...	$z_{2,k-1}$	$z_{2,k}$	$z_{2,k+1}$	...	z_{2,l_2}
...	...	...	...	...	...	...	...
t	$z_{t,1}$	...	$\mathbf{z_{t,k-1}}$	$\mathbf{z_{t,k}}$	$\mathbf{z_{t,k+1}}$	...	z_{t,l_t}
$t+1$	$z_{t+1,1}$	...	$z_{t+1,k-1}$	$\mathbf{z_{t+1,k}}$	$z_{t+1,k+1}$	...	$z_{t+1,l_{t+1}}$
...	...	...	...	...	...	...	...
T	$z_{T,1}$	...	$z_{T,k-1}$	$z_{T,k}$	$z_{T,k+1}$	...	z_{T,l_T}

Нехай $(u, v, w|z)$ набір булевих вектор-змінних. Складемо формулу числення висловлювань

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(a_1, \ldots, a_\zeta, b_1, \ldots, b_\zeta, c_1, \ldots, c_\zeta, d_1, \ldots, d_\zeta)$$

від 4ζ простих висловлювань так, що вона набуває значення істина тоді і тільки тоді, коли прості висловлювання інтерпретуються так, що булевий вектор $z = (I(d_1), \ldots, I(d_\zeta))$ відповідає коду комірки отриману за один крок роботи МТ, при значеннях кодів u, v, w для трьох комір вище: $u_i = I(a_i), v_i = I(b_i), w_i = I(c_i), i = 1, 2, \ldots, \zeta$

Оскільки $R \in P$, тл існує поліном $h(s)$ такий, що МТ, обчислює значення предиката R на стрічках x, y.за час $T = h(|x| + |p(x)|)$ Покладемо також $z_{T,1} = code(1, q_0)_2$

Шукана формула числення висловлювань

$$\widehat{\mathcal{F}} = \bigwedge_{t=1}^{T-1} \bigwedge_{i=1}^{l_t} \mathcal{F}(a(t-1, k-1), b(t-1, k), c(t-1, k+1), d(t, k)) \bigwedge$$

$$\bigwedge \mathcal{F}(a(T-1, 1), a(T-1, 1), c(T-1, 2), code(1, q_0)_2).$$

Для даної стрічки x предикат $L(x)$ набуває значення істина, коли формула

$$\mathcal{F}^* := \widehat{\mathcal{F}}|_{I(a(0,1))=x_1, \ldots I(a(0,n))=x_n} \quad (n = |x|)$$

є виконливою, як формула, що складена з простих висловлювань $a(0, n+1), a(0, n+2), \ldots a(0, |x| + p(|x|)), a(1, 1), \ldots, a(T-1, l_{T-1})$.

Якщо формулу

$$\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_\zeta, b_1, \ldots, b_\zeta, c_1, \ldots, c_\zeta, d_1, \ldots, d_\zeta),$$

подати у вигляді КНФ, то вона буде містити скінченну кількість співмножників (кон'юнкцій), кожен з яких не більше як скінченну кількість елементарних диз'юнкцій. А отже, при будь-якому взаємно -однозначному двійковому кодуванні формули записаних у вигляді КНФ, довжина коду КНФ формули $\mathcal{F}$ буде обмеженою деякою константою C, яка визначається лише системою команд МТ, що обчислює $R(x, y)$ і не залежить від розміру вхідних даних.

Розмір коду формули $\mathcal{F}^*$ буде обмежений числом $C\ cdotT \cdot l_T = C \cdot h(|x| + p(|x|)) \cdot (|x| + p(|x|) + h(|x| + p(|x|)))$.

Висновок: функція $f(x)$, яка по заданому x будує код формули $\mathcal{F}^*$ будується виходячі з системи команд машини Тюринга, що обчислює предикат $R(x,y)$, і є поліномом, а отже маємо поліноміальну звідність

$$L(x) = SAT(f(x)).$$

□

2 Теорія алгоритмів. Алгоритмічна мова Гьоделя

2.1 Примітивно рекурсивні функції

Нехай $\bar{\mathbb{N}}$ множина натуральних чисел з нулем. Визначимо клас примітивно рекурсивних функцій $f = f(x_1, x_2, \dots, x_k) : \bar{\mathbb{N}}^k \mapsto \bar{\mathbb{N}}$ $k = 0, 1, 2, ...$, індуктивно.

1. Базові функції:

1A. $Z(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{N}^+$.

1B. $N(x) = x + 1$ -функція, що видає наступний номер(next).

1C $I_k^n(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots x_n) = x_k-$ проектори, які з кортежів змінних "вирізають"певну координату, $n = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, \dots, n$.

2. Правила побудови нових функцій

2A. Оператор підстановки (суперпозиції) приймає на вхід $n+1$ функцій - $g(y_1, y_2, \dots, y_m), h_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, m$ і повертає функцію

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, x_2, \dots, x_n), h_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, x_2, \dots, x_n)); \tag{2.1.1}$$

2Б. Оператор примітивної рекурсії приймає на вхід

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ та } h(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2})$$

і повертає функцію від $n+1$ змінних, яка визначається таким чином

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.1.2}$$
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, x_2, \dots, x_n, y, f(x_1, x_2, \dots, x_n, y)). \tag{2.1.3}$$

Означення 2.1. *1. Базові функції є* **примітивно рекурсивними***;*

2. функції, які отримані застосуванням операторів підстановки або примітивної рекурсії до примітивно-рекурсивних функцій є **примітивно-рекурсивними***.*

Означення 2.2. *Для даної примітивно-рекурсивної функції f, Послідовність, що складаєтьса з базових функцій, операторів підстановки, та примітивної рекурсії, які потрібні для отримання функції f, будемо називати* **програмою** *для обчислення значень цієї функції.*

Зрозуміло, що одна і та сама примітивно-рекурсивної функція f може мати різні програми для обчислення її значень.

Лема 2.1. *Нехай $g(y_1, y_2, \dots, y_k)-$ примітивно рекурсивна (рекурсивна) функція і нехай $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}-$ множина змінних. Якщо $z_1, z_2, \dots, z_k \in X$, то функція*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(z_1, z_2, \dots, z_k)$$

є примітивно рекурсивною (рекурсивною).

Доведення. I Якщо $z_j \in X$, то існує номер $l_j : z_j = x_{l_j}$, і $z_j = I^n_{l_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тоді

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= g(z_1, z_2, \dots, z_k) = \\ &= g(I^n_{l_1}(x_1, x_2, \dots, x_n), I^n_{l_2}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, I^n_{l_k}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

і за правилом $2A$ отримана функція є примітивно рекурсивною (рекурсивною). □

Наслідок 2.1. *Введення фіктивних змінних: якщо $g(x_1, x_2, \dots, x_k)-$ примітивно рекурсивна (рекурсивна)функція, $f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ є примітивно рекурсивною (рекурсивною) функція*

Доведення. Досить покласти $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}, \quad z_j = x_j, j = 1, 2, \dots, k$ □

Наслідок 2.2. *Перестановка змінних*

Наслідок 2.3. *Ототожнення змінних*

Наслідок 2.4. *a) Нуль функція $Z(x_1, \dots, x_k) \equiv 0$ є примітивно рекурсивною;*

b) Постійна функція $C^n_a(x_1, \dots, x_k) = a$ є є примітивно рекурсивною;

Приклад 2.1. *Функція $f(x, y) = x + y$ є примітивно-рекурсивною.*

Застосуємо оператор примітивної рекурсії до функцій $g(x) = I^1_1(x) = x, h(x) = N(x)$. За формулами 2.1.2,2.1.3 отримуємо

$$f(x, 0) = x, \quad f(x, y + 1) = N(f(x, y)) = f(x, y) + 1 = x + y + 1.$$

Приклад 2.2. *Нехай функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є примітивно-рекурсивною, тоді функція*

$$S(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z) = \sum_{y=0}^{z} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y)$$

є примітивно-рекурсивною.

Дійсно, $S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y+1) = S(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y) + f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y+1).$$

Якщо $a(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})-$ примітивно-рекурсивна функція, застосуванням оператора суперпозиції маємо примітивно-рекурсивну функцію:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{y=0}^{a(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y)$$

Вправа. Покажіть, що функції $f(x, y) = x \cdot y$ є примітивно-рекурсивною, а якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є примітивно-рекурсивною, то і функція

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z) = \prod_{y=0}^{z} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, y).$$

є примітивно-рекурсивною.

Завдання. Довести, що наступні функції є примітивно рекурсивними.

$$x^y, \quad \delta(x) = \begin{cases} x-1 & \text{якщо} \quad x > 0 \\ 0 & \text{якщо} \quad x = 0 \end{cases}, \; x \dot{-} y = \begin{cases} x-y & \text{якщо} \quad x \geq y \\ 0 & \text{якщо} \quad x < y \end{cases};$$

$$|x-y|; \quad sg(x) == \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x = 0 \\ 1 & \text{якщо} \quad x \neq 0 \end{cases}; \overline{sg}(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо} \quad x = 0 \\ 0 & \text{якщо} \quad x \neq 0 \end{cases};$$

$$x!; \quad \min(x, y); \quad \min(x_1, x_2, \ldots, x_n); \quad \max(x, y); \quad \max(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

$rm(x, y)$ – остача від ділення x на y; $qt(x, y)$ – частка від ділення x на y.

2.2 Частково-рекурсивні функції

Введемо в розгляд ще один оператор для утворення нових функцій.

2С. Обмежений оператор мінімізації або $\mu-$ оператор.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)-$ деяка частково-визначена функція від $n+1-$ ї змінної і $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ деякий набір значень змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Можливі такі випадки:

1) $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y)$ не приймає значення 0 ні при яких значеннях y;

2) $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y)$ приймає значення 0 і y^* є мінімальним значенням, при якому $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y^*) = 0$, але існують значення $y : y < y^*$, такі, що значення $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y)$ не є визначеним;

3) $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y)$ приймає значення 0 і якщо y^* є мінімальним значенням, при якому $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y^*) = 0$, то для всіх $y : y < y^*$, значення $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, y)$ є визначеним відмінним від нуля числом.

Оператор мінімізації діє наступним чином. Отримавши частково-визначену функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ він повертає частково-визначену функцію

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y[f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0](x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \begin{cases} \text{не визначена} & \text{якщо для значень } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ мають місце випадки 1) або 2)} \\ y^* & \text{якщо для значень } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ має місце випадок 3)} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

У випадку 2) значення функції h є невизначеним, незважаючи на існування розв'язку y^* рівняння $f = 0$, тому, що механічною процедурою послідовного обчислення значень $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ при $y = 0, 1, \ldots$ ми не доберемося до потрібного значення y^*.

Зрозуміло, що застосування $\mu-$ оператора до скрізь визначеної функції може привести до частково визначеної функції.

Означення 2.3. *1. Базові функції є* **частково-рекурсивними***;*

2. функції, які отримані застосуванням операторів підстановки, примітивної рекурсії або мінімізації до частково-рекурсивних функцій є **частково-рекурсивними***.*

Означення програми обчислення значень частково-рекурсивної функції вводиться очевидним чином. Зауважимо, що якщо частково-рекурсивна функція не визначена в певній точці, то можна вважати, що при обчисленні значення функції в цій точці програма не зупиняється.

Означення 2.4. *Частково-рекурсивна функція, яка визначена для всіх значень змінних називається* **загально-рекурсивною***.*

Отже, маємо такі класи функцій:

$$\{\text{примітивно-рекурсивні}\} \subseteq \{\text{загально-рекурсивні}\} \subset \{\text{частково-рекурсивні}\}.$$

Означення 2.5. *Згідно концепції К. Гьоделя* **алгоритм** *це програма обчислення значень деякої частково-рекурсивної функції.*

Теза Чорча. *Клас алгоритмічно (механічно) обчислювальних функцій збігається з класом частково-рекурсивних функцій.*

Означення 2.6. *Предмкат $A(x_1, \ldots, x_n)$ визначений на множині $\bar{\mathbb{N}}^n$ називається примітивно-рекурсивним (загально-рекурсивним), якщо його характеристична функція $\chi_A(x_1, \ldots, x_n)$є примітивно-рекурсивною (загально-рекурсивною).*

Приклад 2.3. *Бінарний предикат "$x < y$" є примітивно рекурсивним, оскільки функція $sg(y \dot{-} x)$ приймає значення 1 тоді і лише тоді, коли $y > x$, а в протилежному випадку приймає значення 0.*

Доведіть, що предикат "$x = y$" є примітивно рекурсивним.

Окремим випадком рекурсивних функцій є рекурсивні предикати.

Приклад 2.4. *Доведіть, що унарний предикат $Pr(x)-$ "x є простим числом" є примітивно-рекурсивним.*

Нагадаємо, що характеристичним предикатом $n-$ арного відношення $R \subseteq \bar{\mathbb{N}}^n$ називається предикат:

$$A_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{якщо} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \\ 0 & \text{якщо} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin R \end{cases},$$

частковим характеристичним предикатом $n-$ арного відношення $R \subset \bar{\mathbb{N}}^n$ називається частково-визначена функція:

$$A_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{якщо} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R \\ \text{не визначено} & \text{якщо} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin R \end{cases}.$$

Означення 2.7. *$n-$ арне відношення R визначене на множині $\mathbb{N}^+$ називається примітивно-рекурсивним (загально-рекурсивним), якщо таким є його характеристичний предикат.*

Зокрема, при $n = 1$ отримуємо означення примітивно-рекурсивної (загально-рекурсивної) множини (унарного відношення): підмножина $M \subseteq \bar{\mathbb{N}}$ називається примітивно-рекурсивною (загально-рекурсивною), якщо такою є її характеристична функція.

Лема 2.2. *Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)-$ примітивно-рекурсивна (загально-рекурсивна) функція, тоді множина розв'язків рівняння*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

є примітивно-рекурсивною (загально-рекурсивною) множиною

Дійсно, характеристичною функцією множини розв'язків є очевидно $\overline{sg}(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.

Лема 2.3. *Графік примітивно-рекурсивної (загально-рекурсивної) функції є примітивно-рекурсивною (загально-рекурсивною) множиною.*

Доведення. За означенням графік функції f від n змінних це $n+1-$ арне відношення $\Gamma_f \subseteq \bar{\mathbb{N}}^{n+1}$:

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) | x_i \in \bar{\mathbb{N}}\}.$$

Для скрізь визначених функцій проекція графіка на перші n координат буде збігатися з $\bar{\mathbb{N}}^n$. Легко бачити, що

$$\overline{sg}(|x_{n+1} - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|)$$

є характеристичною функцією графіка Γ, звідки і випливає результат. □

Лема 2.4. *1. Якщо $A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ та$B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$– примітивно-рекурсивні (загально-рекурсивні) предикати, то такими є $A \wedge B, A \vee B, \neg A, \neg B$*

2. 1. Якщо $R_1, R_2 \subseteq -\mathbb{N}^k$ примітивно-рекурсивні (загально-рекурсивні) відношення, то такими є $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2.\overline{R}_1, \overline{R}_2$,

Доведення. Доведення випливає з очевидних формул

$$\chi(A \wedge B) = \chi(A) \cdot \chi(B), \chi(A \vee B) = (\chi(A) + \chi(B)) \dot{-} \chi(A) \cdot \chi(B) \quad \chi(\neg A) = \overline{sg}(\chi(A))$$

$$A_{R_1 \cap R_2} = A_{R_1} \wedge A_{R_2}, A_{R_1 \cup R_2} = A_{R_1} \vee A_{R_2}, A_{\overline{R}_1} = \neg A_{R_1}.$$

□

Введемо операції обмеженого квантування предикатів A:

$$B_1(y, x_2, \ldots, x_n) = \forall x(x < y) A(x, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.2.2}$$

$$B_2(y, x_2, \ldots, x_n) = \exists x(x < y) A(x, x_2, \ldots, x_n), \tag{2.2.3}$$

при цьому $B_1(y, x_2, \ldots, x_n) = 1$ тоді і лише тоді коли для будь-якого $z : z < y$ має місце $A(z, x_2, \ldots, x_n) = 1$, а $B_2(y, x_2, \ldots, x_n) = 1$ тоді і лише тоді коли знайдеться $z^* : z^* < y$ таке, що $A(z^*, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Зауважимо, що на відміну від необмеженого квантування тут арність предикату не зменшується.

Лема 2.5. *Якщо A примітивно-рекурсивний (загально-рекурсивний) предикат, то примітивно-рекурсивними (загально-рекурсивними) є також і предикати:*

$$B_1(y, x_2, \ldots, x_n) = \forall x_{x<y} A(x, x_2, \ldots, x_n), \quad B_2(y, x_2, \ldots, x_n) = \exists x_{x<y} A(x, x_2, \ldots, x_n)$$

Доведення. Дійсно,

$$\chi(B_1) = sg\left(\prod_{x<y} \chi_A(x, x_2, \ldots, x_n)\right);$$

$$\chi(B_2) = \overline{sg}\left(\sum_{x<y} \chi_A(x, x_2, \ldots, x_n\right),$$

що і доводить лему. □

Теорема 2.1. *(Про оператор CASE). Якщо, $A_1, A_2, \ldots, A_n$– примітивно рекурсивні (рекурсивні) предикати, ніякі два з яких не приймають значення 1 одночасно, то функція і $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}$– примітивно рекурсивні (рекурсивні) функції, то*

$$f(x_1, \ldots x_n) = \begin{cases} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{якщо} \quad A_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 \\ f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{якщо} \quad \text{такого } i \text{ не існує.} \end{cases}$$

Доведення.

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \chi(A_i) + f_{n+1} \cdot \overline{sg}\left(\sum_{i=1}^{n} \chi(A_i)\right).$$

□

Приклад 2.5. *Розглянемо частково-визначену функцію*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{якщо} \quad x \text{ є квадратом деякого числа} \\ \text{не визначено} & \text{якщо} \quad x \text{ не є квадратом деякого числа} \end{cases}$$

Ця функція є частково рекурсивною, бо

$$f(x) = \mu_y[|y^2 - x| = 0](x).$$

Приклад 2.6. *Розглянемо тепер скрізь визначену функцію - ціла частина квадратного кореня:*

$$[\sqrt{x}] = \text{найбільше } n: \ n^2 \leq x < (n+1)^2. \tag{2.2.4}$$

Неважко бачити, що

$$[\sqrt{x}] = \mu_y(sg((y+1)^2 \dot{-} x) - 1 = 0) \tag{2.2.5}$$

а оскільки вона є скрізь визначеною, то вона є загально-рекурсивною.

Виникає природне питання: чи є вона примітивно-рекурсивною? Виявляється, що якщо μ- оператор дає скрізь визначену функцію, то за певних умов отримана функція буде навіть примітивно рекурсивною.

Теорема 2.2. *(Про обмежений оператор мінімізації) Нехай* $g(x_1, \ldots, x_n, y), \alpha(x_1, \ldots, x_n)-$ *такі примітивно-рекурсивні функції, що для довільного набору* $(x_1, \ldots, x_n)$ *рівняння*

$$g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$$

має розв'язок, причому

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y(g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0)(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

для всіх значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то функція* f *є примітивно рекурсивною.*

Доведення. Зафіксуємо деякий набір значень змінних $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ і покладемо $a_z = \mu_y[g(z_1, \ldots, z_n, y) = 0]$. Розглянемо послідовність примітивно-рекурсивних функцій

$$u_i(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{l=0}^{i} g(x_1, \ldots, x_n, l), \ i = 0, 1, 2, \ldots,$$

які будуть такими як скінченні добутки примітивно-рекурсивних функцій. Неважко бачити, що якщо покласти в цих функціях $x_1 = z_1, x_2 = z_2, \ldots, x_n = z_n$, то будемо мати

$$u_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) \neq 0 \ \text{ при } \ i = 0, 1, 2, \ldots, a_z - 1;$$

і

$$u_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \ \text{ при } \ i \geq a.$$

Отже, кількість ненульових доданків у сумі $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ буде дорівнювати як раз a_z. За умовою теореми $a_z \leq \alpha(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, звідки,

$$a_z = \sum_{i=0}^{\alpha(z_1, z_2, \ldots, z_n)} sg(u_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)).$$

Отже для довільного набору значень $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцію

$$\mu_y[g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0](x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

можна подати у вигляді:

$$\mu_y[g(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0](x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)} sg(u_i(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

і вона є примітивно-рекурсивною. □

Обмежений $\mu-$ оператор, можна застосовувати і до предикатів. Він перетворює $n-$ місний предикат $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на функцію, яка залежить від n змінних $z, x_2, \ldots, x_n$:

$$(\mu y_{y<z} A)(z, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} y & y < z \ \text{ є найменший розв'язок рівняння} A(x, x_2, \ldots, x_n) = 1 \\ z & \text{якщо вказане рівняння не має розв'язку} \end{cases} \tag{2.2.6}$$

При цьому, якщо предикат A був примітивно-рекурсивним, то такою буде і отримана функція. Дійсно, розглянемо функції $U_i(x_2, \ldots, x_n) = \prod_{l=0}^{i} (A(l, x_2, \ldots, x_n) - 1), i = 0, 1, 2, \ldots$. Якщо $y : A(y, x_2, \ldots, x_n) = 1$, то для всіх $i : i \geq y$ маємо $U_i(x_2, \ldots, x_n) = 0$. Тепер, легко бачити, що потрібну функцію можна записати наступним чином:

$$\mu y_{y<z} A)(z, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{z} U_i(x_2, \ldots, x_n)$$

Приклад 2.7. *Функція,* $[\sqrt{x}]$ *була отримана застосуванням оператора мінімізації (див.* (2.2.4)*). Оскільки,* $[\sqrt{x}] \leq x$, *тобто вона обмежується примітивно-рекурсивною функцією, то* $[\sqrt{x}]$, *за доведеною теоремою, є примітивно-рекурсивною.*

Важливим прикладом примітивно-рекурсивної функції є **квадратична остача** $q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$. Про це свідчить наступна теорема.

Теорема 2.3. *(Робінсон.) Всі примітивно-рекурсивні функції від однієї змінної можуть бути отримані з функцій* $N(x), q(x) = x \dot{-} [\sqrt{x}]^2$ *застосуванням скінченної кількості операцій додавання* $+$*, суперпозицій* $*$ *і оператора примітивної рекурсії* J *(ітерування функцій)* $g(x) \to J[g](x)$*, дія якого визначається наступним чином:*

$$J[g](0) = 0, \quad J[g](n+1) = g(J[g](n)), \tag{2.2.7}$$

де g *- примітивно рекурсивна функція.*

Приклад. Функція $f(x) = x$ може бути отримана наступним чином:

$$J[N]: \quad f(0) = 0, \quad f(x+1) = N(f(x)),$$

а функцію тотожний нуль $Z(x)$ можна отримати так

$$J[x]: \quad Z(0) = 0, \quad Z(x+1) = Z(x).$$

Як відомо, декартів добуток зліченних множин є зліченною множиною, зокрема, такою є множина $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Її елементи можна записати у нескінченну таблицю:

$$\begin{array}{cccccc}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots & (0,n) & \dots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots & (1,n) & \dots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots & (2,n) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(n,0) & (n,1) & (n,2) & \dots & (n,n) & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

і вказати спосіб нумерації елементів цієї таблиці, тобто побудувати функцію $c(x, y)$, яка кожній парі (x, y) ставить у відповідність її номер. Нас цікавлять такі нумерації, при яких відповідна функція $c(x, y)$ є примітивно-рекурсивною. Канторовський спосіб нумерації визначається наступним чином:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \dots \\
2 & 4 & 7 & 11 & \dots & \dots \\
5 & 8 & 12 & \dots & \dots & \dots \\
9 & 13 & \dots & \dots & \dots & \dots \\
14 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Легко бачити, що для нього $c(x, y) = qt((x + y) \cdot N(x + y), 2) + x$ і ця функція є примітивно-рекурсивно. Введемо в розгляд функції $l(x)$ та $r(x)$, які повертають першу та відповідно другу координати пари з номером x, тобто для них повинна справджуватися тотожність:

$$c(l(x), r(x)) = x.$$

Приклад 2.8. *Функції* $l(x), r(x)$ *є примітивно-рекурсивними.*

Для доведення цього введемо в розгляд функцію $s(x)$, яка повертає суму координат пари з номером x, і доведемо її примітивно-рекурсивність. Оскільки,

$$c(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x,$$

то $z = x + y$ є найбільшим розв'язком нерівності $z(z+1)/2 \leq c(x, y)$. Цю умову можна виразити за допомогою оператора мінімізації наступним чином:

$$s(n) = \mu_z[\overline{sg}(qt((z+2) \cdot (z+1), 2) \dot{-} n) = 0](n).$$

Очевидно, що $s(n) \leq n$ і за теоремою 2.2 функція $s(n)$, а отже і функції $l(n) = n \dot{-} qt(s(n)(s(n)+1), 2)$, $\;r(n) = s(n) \dot{-} l(n)$ є примітивно-рекурсивними.

Приклад 2.9. *Важливим прикладом є примітивно-рекурсивна функція Гьоделя*

$$\Gamma(x, y) = rm(l(x), (y+1) \cdot r(x) + 1). \tag{2.2.8}$$

Її корисність обумовлюється такою властивістю.

Лема 2.6. *Для довільної скінченної послідовності чисел* $a_0, a_1, \dots, a_n \in \bar{\mathbb{N}}$, *система рівнянь*

$$\begin{cases} \Gamma(x, 0) & = & a_0 \\ \Gamma(x, 1) & = & a_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \Gamma(x, n) & = & a_n \end{cases}$$

має розв'язок x.

Доведення. Спробуємо вказати числа u, v такі, що канторовий номер $c(u, v)$ був розв'язком даної системи рівнянь. За означенням функції Гьоделя (2.2.8), нам потрібно підібрати ці числа так, щоб виконувались співвідношення

$$rm(u, (y+1) \cdot v + 1) = a_y, \qquad (y = 0, 1, 2, \dots, n). \tag{2.2.9}$$

Ця система рівностей еквівалентна виконанню двох умов

1) $u - a_y$ ділиться на $(y+1) \cdot v + 1$;

2) $(y+1) \cdot v + 1 > a_y$,

$y = 0, 1, 2, \dots, n$. Покладемо

$$v = \left(1 + n + \sum_{i=0}^{n} a_i\right)!, \quad m_y = (y+1)v + 1.$$

Для такого v умова 2) буде очевидно виконана, більш того, числа $m_0, m_1, \dots, m_n$ будуть попарно взаємно-простими. Справді, для $i, j : 0 \leq i < j \leq n$ маємо $m_j - m_i =$

$(j-i)v$. Очевидно, що число v ділиться на $j-i < n$. Якби числа m_i, m_j мали спільний простий дільник, то він мав би бути дільником і для v, але з означення чисел m_i випливає, що єдиним їх спільним дільником з числом v є 1. Отже, m_i, m_j є взаємно-простими. Покладемо

$$M = \prod_{i=1}^{n} m_i, \quad M_i = \frac{M}{m_i},$$

де числа M_i та m_i є також взаємно-простими. Тоді маємо розклад одиниці:

$$M_i \cdot z_i - m_i \cdot w_i = 1.$$

Тепер можна визначити значення u, покладемо

$$u = \sum_{i=0}^{n} a_i M_i z_i.$$

Звернемо увагу, що для довільного m_i всі члени цієї суми окрім і-го діляться на m_i. Що стосується доданка $a_i M_i z_i$, то як випливає з розкладу одиниці, остача від ділення $M_i z_i$ на m_i дорівнює одиниці, а отже остача від ділення всього доданка на m_i буде дорівнювати a_i.

Отже, $rm(u, m_i) = a_i$, і умова 1) і (2.2.9) виконані. □

Нумерацію трійок, четвірок і т.д можна ввести за індукцією. Введемо канторовські нумерації множин $\mathbb{N}^n$ та проекції номерів на відповідні координати наступним чином:

$$c^{(2)}(x_1, x_2) = c(x_1, x_2), \pi_1^{(2)}(n) = l(n), \pi_2^{(2)}(n) = r(n),$$

$$c^{(m+1)}(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}) = c^m(c(x_1, x_2), \ldots, x_m, x_{m+1})$$

$$\pi_i^{(m+1)}(n) = \begin{cases} \pi_{i-1}^{(m)}(n) & \text{якщо} \quad i > 2 \\ r(\pi_1^{(m)}(n)) & \text{якщо} \quad i = 2 \\ l(\pi_1^{(m)}(n)) & \text{якщо} \quad i = 1 \end{cases}$$

Приклад 2.10. *Нехай $Pr(x)-$ примітивно-рекурсивний предикат "x є простим числом,"тоді функція*

$$\pi(x) = \sum_{y \le x} Pr(y)$$

дає кількість простих чисел, що не перевищують числа x, і є примітивно-рекурсивною.

Введемо в розгляд нумеруючу функцію $p(x)$ для множини простих чисел, яка видає просте число по заданому порядковому номеру (починаючи з нуля), тобто $p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, p(3) = 7, p(4) = 11, \ldots$. Оскільки множина простих чисел, що не перевищують $p(n)$ складається з чисел $p(0), p(1), p(2), \ldots, p(n-1), p(n)$, то маємо тотожність

$$\pi(p(n)) = n + 1.$$

Виходячи з неї, функцію $p(n)$ можна отримати за допомогою обмеженого оператора мінімізації наступним чином:

$$p(n) = \mu_x[|\pi(x) - (n+1)| = 0](n).$$

Для застосування теореми 2.2 залишилося обмежити функцію $p(n)$ певною примітивно-рекурсивною функцію. Методом математичної індукції по n доведіть, що $p(n) \leq 2^{2^n}$.

Приклад 2.11. *Введемо в розгляд функцію $ex(x, y)$, яка повертає степінь, в якому просте число з номером x входить в розклад числа y в добуток степенів простих чисел, тобто за означенням $y = p(x)^{ex(x,y)} \cdot z, \quad rm(z, p(x)) \neq 0$.*

Для доведення того, що ця функція є примітивно-рекурсивною знову скористаємося теоремою 2.2 про обмежений оператор мінімізації. Враховуючи, що $ex(x, y)$ є найбільшим розв'язком z рівняння $rm(y, p(x)^z) = 0$, цю функцію можна визначити наступним чином

$$ex(x, 0) = 0, \quad ex(x, y) = \mu_u[\overline{sg}\left(rm(y, (p(x))^{N(u)})\right) = 0].$$

Очевидна оцінка $ex(x, y) \leq y$ завершує доведення.

Приклад 2.12. *Функція $\Phi(n)$, яка повертає число Фібоначі з номером n визначаєтъся наступним чином.* $\Phi(0) = \Phi(1) = 1, \quad \Phi(n+1) = \Phi(n) + \Phi(n-1)$.

Звернемо увагу на те, що оператор примітивної рекурсії, для обчислення значення функції в точці $y+1$ звертається до її значення в попередній точці y, а для обчислення чисел Фібоначі треба знати два попередні значення. Додаткові комірки пам'яті можна створити скориставшись основною теоремою арифметики про розклад натурального числа в добуток степенів простих чисел, а також введеною вище функцією $ex(x, y)$. Введемо в розгляд допоміжну функцію

$$\Psi(x) = 2^{\Phi(x)} \cdot 3^{\Phi(x+1)}$$

і доведемо її примітивну-рекурсивність. Відповідний оператор примітивної рекурсії буде мати вигляд $\Psi(0) = 6$

$$\Psi(x+1) = 2^{ex(1,\Psi(x))} \cdot 3^{ex(0,\Psi(x))+ex(1,\Psi(x))}.$$

Тепер примітивна рекурсивність функції $\Phi(n)$ випливає з очевидної рівності.

$$\Phi(n) = ex(0, \Psi(n)).$$

Наведений вище прийом узагальнює наступна теорема.

Теорема 2.4. *(Про зворотну рекурсію).*

Нехай $\alpha_i(x), i = 1, 2, \ldots, s-$ *набір примітивно-рекурсивних функцій, що задовольняють нерівності* $\alpha_i(x+1) \leq x$ *і функції* $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h(x_1, x_2, \ldots x_n, y, z_1, z_2, \ldots, z_s)$ *є примітивно-рекурсивними, то функція* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$, *яка однозначно визначена рівностями*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y+1) =$$

$$h(x_1, x_2, \ldots x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1(y+1)), \ldots, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_s(y+1))) \quad (2.2.10)$$

є також примітивно-рекурсивною.

Порівнюючи ці рівності з означенням оператора примітивної рекурсії (2.1.2), (2.1.3) ми бачимо, що при $s = 1$ і $\alpha_1(x) = x \dot{-} 1$. вони визначають оператор примітивної рекурсії.

Доведення. Введемо в розгляд нову функцію

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = \prod_{i=0}^{y} p(i)^{f(x_1, \ldots, x_n, i)}.$$

З означення випливає, що для довільного $u : u \leq y$ має місце

$$f(x_1, \ldots, x_n, u) = ex(u, F(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

Оскільки за умовою теореми $\alpha_i(y+1) \leq y$, то маємо

$$f(x_1, \ldots, x_n, \alpha_i(y+1)) = ex(\alpha_i(y+1), F(x_1, \ldots, x_n, y)). \quad (2.2.11)$$

Побудуємо примітивно рекурсивну схему для обчислення F. З її означення випливають формулм

$$F(x_1, \ldots, x_n, 0) = p(0)^{g(x_1, \ldots, x_n)};$$

$$F(x_1, \ldots, x_n, y+1) = F(x_1, \ldots, x_n, y) \cdot p(y+1)^{f(x_1, \ldots, x_n, y+1)}.$$

Використовуючи формули (2.2.10) та (2.2.11) отримуємо

$$F(x_1, \ldots, x_n, y+1) =$$

$$= F(x_1, \ldots, x_n, y) \cdot p(y+1)^{h(x_1, x_2, \ldots x_n, y, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1(y+1)), \ldots, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_s(y+1)))} =$$

$$= F(x_1, \ldots, x_n, y) \cdot p(y+1)^{h(x_1, x_2, \ldots x_n, y, ex(\alpha_1(y+1), F(x_1, \ldots, x_n, y)), \ldots, ex(\alpha_s(y+1), F(x_1, \ldots, x_n, y)))}$$

Тепер ці співвідношення можна подати у вигляді

$$F(x_1, \ldots, x_n, 0) = G(x_1, \ldots, x_n);$$

$$F(x_1, \ldots, x_n, y+1) = H(x_1, \ldots, x_n, y, F(x_1, \ldots, x_n, y)),$$

де

$$G(x_1, \ldots, x_n) = p(0)^{g(x_1, \ldots, x_n)};$$

$$H(x_1, \ldots, x_n, y, z) = z \cdot p(y+1)^{h(x_1, x_2, \ldots x_n, y, ex(\alpha_1(y+1), z), \ldots, ex(\alpha_s(y+1), z))}.$$

Отже, отримана схема примітивної рекурсії для функції F, з якої отримується функція

$$f(x_1, \ldots, x_n, y) = ex(y, F(x_1, \ldots, x_n, y)).$$

$\square$

2.3 Рекурсивні та рекурсивно-зліченні множини

Означення 2.8. *Множина* $R \subset \bar{\mathbb{N}}$ *називається* **рекурсивно зліченною**, *якщо існує така примітивно рекурсивна функція* $f = f(x, y)$, *така, що рівняння* $f(a, x) = 0$ *(a - параметр, x - невідоме) має розв'язок тоді і лише тоді, коли* $a \in R$

Теорема 2.5. *Довільна примітивно-рекурсивна множина є рекурсивно зліченною.*

Доведення. Нехай R - примітивно-рекурсивна множина, тоді її характеристичний предикат $\chi_R(x)$ є примітивно-рекурсивною (рекурсивною) функцією. Щоб довести. що R є рекурсиво-зліченною, треба підібрати функцію функцію $f(x, y)$, яка буде стояти у лівій частині рівняння. Легко бачити, що рівняння $\overline{sg}(\chi_R(a)) + x = 0$ - має розв'язок тоді і лине тоді, якщо коли $\chi_R(a) = 1$, тобто коли $a \in R$ □

Теорема 2.6. *Множина R рекурсивно злічення тоді і лише тоді, коли вона збігається з областю значень деякої примітивно рекурсивної функції.*

Доведення. Нехай $f(x)$ - примітивно рекурсивна функція. Покажемо, що множина її значень R є рекурсивно зліченною. Запишемо рівняння: $|f(x) - a| = 0$. Якщо параметру a надати значення з множини R, то рівняння буде мати розв'язки, а якщо $a \notin R$, то рівняння розв'язків немає. Отже, множина значень примітивно рекурсивної функції є рекурсивно зліченною.

Навпаки припустимо, R - рекурсивно злічення множина. Підберемо таку функцію, щоб R стала областю значень цієї функції. Нехай $F(a, x)$ така примітивно рекурсивна функція, що $F(a, x) = 0$ має розв'язок тоді і тільки тоді коли $a \in R$. Покладемо

$$f(t) = l(t)\overline{sg}(F(l(t), r(t))) + b \cdot sg(F(l(t), r(t))),$$

де $l(t), r(t)$ - ліва та права координати пари з канторовським номером рівним t, $b \in R-$ деякий елемент. Припустимо, що для деякого t виконується $F(l(t), r(t)) = 0$. Тоді $f(t) = l(t) \in R$. Якщо ж $F(l(t), r(t)) \neq 0$, то $f(t) = b \in R$. Отже, область значень нашої функції лежить в R.

Покажемо, що всі елементи $a \in R$ є значеннями нашої функції. Якщо $a \in R$, то рівняння $F(a, x) = 0$ має розв'язок, позначимо його через x^* і покладемо $t^* = c(a, x^*)$. Оскільки, $l(c(a, x^*)) = a$, то $f(t^*) = a$. □

Теорема 2.7. *Об'єднання і перетин скінченного числа рекурсивно злічених множин є рекурсивно зліченною множиною.*

Доведення. $A_1, A_2, ...A_m$ - множини. З кожною множиною зв'язане рекурсивно злічені рівняння: $F_1(a, x) = 0$ $F_2(a, x) = 0$ $F_m(a, x) = 0$ рівняння для об'єднання $\bigcup_i A_i$ буде таким $\prod_{i=1}^{n} f_i(a, x_i) = 0$. А для перетину - $\sum_{i=1}^{n} F_i(a, x_i) = 0$ □

Теорема 2.8. *(Теорема Поста.) Якщо множина A і її доповнення $\overline{A}$ рекурсивно зліченні, то вони є загально-рекурсивними множинами.*

Доведення. Якщо та $\overline{A}$ - рекурсивно зліченні, то існують функції $f = f(a,x), g = g(a,x)$, що $f(a,x) = 0$ $(g(a,x) = 0)$ має розв'язок тоді і лише тоді, коли $a \in A$ $(a \in \overline{A})$. Розглянемо функцію

$$h(a) = \mu_x(f(a,x) \cdot g(a,x) = 0)$$

μ_x - найменше x, що є розв'язком рівняння $f(a,x) \cdot g(a,x) = 0$. Розглянемо функцію $F(a) = \overline{sg} f(a, h(a))$, що є характеристичною функцією множини A. Якщо $a \in A$, то $h(a)$ набуде значення найменшого розв'язку, тоді $f(a, h(a)) = 0$, звідки $F(a) = 1$. Якщо ж $a \notin A$, то $a \in \overline{A}$ і $g(a, h(a)) = 0$ і $f(a, h(a)) \neq 0$. Звідки, $F(a) = \overline{sg} f(a, h(a)) = 0$. Отже, функція $F(a)$ є характеристичною функцією множини A, а оскільки вона отримана з примітивно-рекурсивних із застосуванням оператора мінімізації, то вона є загально-рекурсивною. Таким чином, множина A є загально-рекурсивною. Тоді за лемою 2.4 її доповнення є також загально-рекурсивною. □

Означення 2.9. *Відношення $R \subset \bar{\mathbb{N}}^k$ називається рекурсивно зліченним, якщо множина її канторовських номерів $c^k(R) \subset \bar{\mathbb{N}}$ є рекурсивно зліченною.*

Узагальненням теореми 2.6 є наступна теорема.

Теорема 2.9. *(Про примітивно-рекурсивну параметризацію рекурсивно-зліченних множин.)*

Відношення $R \subseteq \bar{\mathbb{N}}^k$ є рекурсивно-зліченним тоді і лише тоді, коли існують примітивно-рекурсивні функції $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_k(t)$:

$$R = \{(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_k(t)) | t \in \bar{\mathbb{N}}\}.$$

Доведення. $\Leftarrow$. Область значень примітивно-рекурсивної функції $c^k(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_k(t))$ збігається з множиною канторових номерів множини L і за теоремою 2.6 є рекурсивно-зліченною.

$\Rightarrow$. Нехай множина $c^k(L)$ канторових номерів множини L є рекурсивно-зліченною, тоді, за теоремою 2.6, існує примітивно-рекурсивна функція $\psi(t) : Im\psi = c^k(L)$, звідки отримуємо шукану параметризацію

$$L = \{(\pi_1^k(\psi(t)), \pi_2^k(\psi(t)), \ldots, \pi_k^k(\psi(t))) | t \in \bar{\mathbb{N}}\}.$$

□

Теорема 2.10. *Підмножина $L \subseteq \bar{\mathbb{N}}^k$ є рекурсивно-зліченною тоді і лише тоді, коли існує примітивно-рекурсивна функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ така, що рівняння*

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$$

має розв'язок $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ тоді і тільки тоді, коли $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in L$.

Доведення. $\Rightarrow$. Якщо множина L є примітивно-рекурсивною, то за попередньою теоремою вона допускає примітивно-рекурсивну параметризацію. Тоді рівняння

$$\sum_{j=1}^{k} |a_j - \phi_j(t)| = 0$$

буде мати розв'язок тоді і лише тоді, коли $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in L$.

$\Leftarrow$. Нехай L множина наборів параметрів $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, при яких рівняння

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_k, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$$

має розв'язок. Покладемо

$$h(x, y) = f(\pi_1^k(x), \pi_2^k(x), \ldots, \pi_k^k(x), \pi_1^m(y), \pi_2^m(y), \ldots, \pi_m^m(y));$$

рівняння $h(a, y) = 0$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли a є канторовим номером набору $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, для якого рівняння $f(a_1, a_2, \ldots, a_k, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0$ має розв'язок. Оскільки $h-$ примітивно-рекурсивна функція, то множина таких a, а значить і множина таких наборів $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ є рекурсивно-зліченною.

$\square$

Теорема 2.11. *Якщо графік всюди визначеної функції $y = f(x)$ є рекурсивно-зліченна множина, то ця функція є загально-рекурсивною.*

Доведення. За умовою теореми графік функції f - множина $\Gamma = \{(x, f(x)) | x \in \bar{\mathbb{N}}\}$ є рекурсивно-зліченною. Тобто є рекурсивно-зліченною множина її канторовських номерів - $\Gamma_1 = \{c^2(x, f(x)) | x \in \bar{\mathbb{N}}\} \subseteq \bar{\mathbb{N}}$. За теоремою 2.6, існує примітивно-рекурсивна функція ψ така, що $Im\psi = \Gamma_1$. Розглянемо рівняння $|t - l(\psi(x))| = 0$, де x невідома, $t-$ параметр. Оскільки функція f є скрізь визначеною, то для довільного значення t точка $(t, f(t)) \in \Gamma$ належить графіку, а отже, $x = c^2(t, f(t))$ є розв'язком вказаного рівняння. Більш того, цей розв'язок є єдиним, адже для кожного t існує точно одна точка графіка, перша координата якої дорівнює t. Таким чином, функція $\mu_x[|t - l(\psi(x))| = 0](t)$ є скрізь визначеною і $\psi(\mu_x[|t - l(\psi(x))| = 0](t)) = c^2(t, f(t))$. Тоді для початкової функції маємо

$$f(t) = r(\psi(\mu_x[|t - l(\psi(x))| = 0](t))),$$

що означає, що вона є загально-рекурсивною. $\square$

Означення 2.10. *Нехай $V \subset \mathbb{N}^+$ і $F = \{f_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), f_2(x_1, \ldots, x_{n_2}), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_{n_k})\}-$ сукупність функцій (n_i- місних операцій на $\mathbb{N}$). Для довільної множини $U \subset \mathbb{N}$ покладемо*

$$F(U) = \{f_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n_i}) | u_j \in U, j = 1, 2, \ldots, n_i, i = 1, 2, \ldots k\}$$

Визначимо множину $F^k(V)$ індуктивно:

$$F^{(0)}(V) = V$$

$$F^{(k+1)}(V) = F\left(\bigcup_{i=0}^{k} F^{(i)}(V)\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Множину

$$\overline{V^F} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} F^{(k)}(V)$$

будемо називати замиканням множини V відносно сукупності операцій F.

Множину $\overline{V^F}$ можна визначити, як найменшу по включенню множину, що містить V і замкнена відносно введених операцій.

Теорема 2.12. *Нехай $V-$ рекурсивно злічення множина і $F-$ сукупність примітивно рекурсивних функцій, тоді $\overline{V^F}$ є рекурсивно зліченною множиною.*

Доведення. Нехай $\phi(x)-$ примітивно рекурсивна функція така, що $Im\phi = V$, тоді елементами множини $\overline{V^F}$ є терми (функціональні форми) від змінних $\phi(z), z = 0, 1, 2, \ldots$. Побудуємо нумерацію ν множини термів індуктивно:

$$\nu(\phi(z)) = 3^z;$$

цим ми визначили нумерацію на V. Далі за індукцією: Якщо функція ν визначена на $F^{(k)}(V)$, то її значення на $F^{(k+1)}(V)$ визначається наступним чином: Якщо $f_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n_i}) \in F^{(k+1)}(V), t_i \in F^{(k)}(V)$, то

$$\nu(f_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n_i})) = 2^i p(1)^{\nu(t_1)} p(2)^{\nu(t_2)} \ldots p(n_i)^{\nu(t_{n_i})}.$$

Побудуємо функцію $g : g(n)$ область значень якої збігається з $\overline{V^F}$.

$$g(n+1) = f_s(g(ex(1, n+1)), g(ex(2, n+1)), \ldots, g(ex(n_s, n+1))), \text{якщо } ex(0, n+1) = s;$$

$s = 1, 2, \ldots, k.$

$$g(n+1) = \phi(ex(1, n+1)), \text{для інших значень } n.$$

Оскільки $ex(u, n+1) \leq n$, за теоремою про глибоку рекурсію маємо примітивну рекурсивність функцій всіх функцій, що стоять в правій частині. Застосування теореми про оператор CASE дає нам примітивну рекурсивність всієї функції $g(n)$. Індукцією по n легко показати, що якщо n є номером певного терма, то $g(n)$ є його значенням. □

Узагальнимо означення 2.10 на векторний випадок.

Означення 2.11. *Нехай* $V \subset \bar{\mathbb{N}}^m$ *і* $F = \{f_1(x_1,\ldots,x_{n_1}), f_2(x_1,\ldots,x_{n_2}),\ldots,f_k(x_1,\ldots,x_{n_k})\}-$ *сукупність вектор-функцій* (n_i- *містних операцій на* $\bar{\mathbb{N}}^m$*), де* $x_i = (x_{i1}, x_{i2},\ldots,x_{im})$,

$$f_i = (f_{i1}(x_1,\ldots,x_{n_i}), f_{i2}(x_1,\ldots,x_{n_i}),\ldots,f_{im}(x_1,\ldots,x_{n_i})), i = 1,2,\ldots,k.$$

Тоді означення множин $F^k(V)$ *та замикання* $\overline{V^F}$ *множини* V *дослівно повторює означення 2.10.*

З попередньої теореми легко отримати такий наслідок.

Наслідок 2.5. *Якщо* $V-$ *рекурсивно-злічення підмножина* $\bar{\mathbb{N}}^m$ *і* $f_{ij}-$ *сукупність примітивно рекурсивних функцій, тоді* $\overline{A^F}$ *є рекурсивно зліченною множиною.*

Доведення. Справді, оскільки

$$f_{i,j} = f_{i,j}(x_{11}, x_{12},\ldots,x_{1m}, x_{21}, x_{22},\ldots,x_{2m},\ldots,x_{n_i1}, x_{n_i2},\ldots,x_{n_im}),$$

$i = 1,2,\ldots,k, j = 1,2,\ldots,m$, то можна ввести в розгляд функції

$$\begin{gathered}\phi_i(z_1,z_2,\ldots,z_{n_i}) = \\ c^m(f_{i1}(\pi_1^m(z_1),\pi_2^m(z_1),\ldots,\pi_m^m(z_1),\pi_1^m(z_2),\pi_2^m(z_2),\ldots,\pi_m^m(z_2),\ldots,\pi_1^m(z_{n_i}),\pi_2^m(z_{n_i}),\ldots,\pi_m^m(z_{n_i}), \\ f_{i2}(\pi_1^m(z_1),\pi_2^m(z_1),\ldots,\pi_m^m(z_1),\pi_1^m(z_2),\pi_2^m(z_2),\ldots,\pi_m^m(z_2),\ldots,\pi_1^m(z_{n_i}),\pi_2^m(z_{n_i}),\ldots,\pi_m^m(z_{n_i}), \\ \ldots \\ f_{im}(\pi_1^m(z_1),\pi_2^m(z_1),\ldots,\pi_m^m(z_1),\pi_1^m(z_2),\pi_2^m(z_2),\ldots,\pi_m^m(z_2),\ldots,\pi_1^m(z_{n_i}),\pi_2^m(z_{n_i}),\ldots,\pi_m^m(z_{n_i})).\end{gathered} \tag{2.3.1}$$

Застосуємо теорему до множини канторових номерів $C(V)$, на якій діють операції $\Phi = \{\phi_1,\phi_2,\ldots\phi_k\}$. Тоді множина $\overline{C(V)^\Phi}$ є рекурсивно-зліченною. З іншого боку, вона очевидно збігається з множиною канторових номерів множини $\overline{A^F}$. Отже, множина $\overline{A^F}$ є рекурсивно-зліченною. □

Теорема 2.13. *(про рекурсію 2-го ступеня). Якщо функції* $\alpha_i(x), \beta_j(x) (i = 1,2,\ldots m, j = 1,2,\ldots k), \gamma(x), h(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k), g(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_m)$ *є примітивно-рекурсивними, причому* $\alpha(x) \leq x, \beta(x) \leq x$, *то функція* $f = f(n,x)$, *значення якої обчислюються за формулами:*

$$f(0,x) = \gamma(x): \tag{2.3.2}$$

$$f(n+1,0) = h(n+1, f(\beta_1(n), f(\beta_2(n),0)), f(n,0), f(\beta_3(n),0),\ldots f(\beta_k(n),0)) \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}f(n+1,x+1) = g(n+1, f(\alpha_1(n), f(n+1,x)), f(\alpha_2(n), f(\alpha_3(n),x+1)), \\ f(\alpha_4(n),x+1),\ldots,f(\alpha_m(n),x+1)),\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

є загально-рекурсивною.

Доведення. Для зменшення довжини формул ми розглянемо типовий випадок $k = 3$ і $m = 4$. Згідно теореми 2.11, досить довести, що графік цієї функції $M = (n, x, f(n, x))$ є рекурсивно-зліченною множиною. Рівність (2.3.2) означає, що трійки $(0, x, \gamma(x))$ належать до M. Рівність (2.3.3) означає, що якщо трійки

$$(\beta_2(n), 0, u), (\beta_1(n), u, v), (n, 0, w), (\beta_3(n), 0, p)$$

належать до M, то і трійка $(n + 1, 0, h(n + 1, v, w, p))$ належать до M.

Рівність (2.3.4) означає, що якщо до M належать трійки

$$(n + 1, x, u), (\alpha_1(n), u, v), (\alpha_3(n), x + 1, p), (\alpha_2(n), p, q), (\alpha_4(n), x + 1, w),$$

то і трійка $(n + 1, x + 1, g(n + 1, x, v, q, w))$ належать M.

Доведення буде полягати у тому, щоби на множині $\bar{\mathbb{N}}^3$ побудувати відповідні операції. Покладемо

$$B((x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_4, y_4, z_4)) = (x_3 + 1, 0, h(x_3 + 1, z_2, z_3, z_4)),$$

якщо виконані такі умови: $x_1 = \beta_2(x_3), x_2 = \beta_1(x_3), y_2 = z_1, x_4 = \beta_3(x_3)$ і покладемо

$$B((x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_4, y_4, z_4)) = (0, 0, \gamma(0)),$$

якщо хоча б одна з цих умов не справджується. Визначимо тепер операцію A :

$$A((x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_5, y_5, z_5)) = (x_1, y_3, g(x_1, y_1, z_2, z_4, z_5)),$$

якщо виконані умови

$$x_2 = \alpha_1(x_1 \dot{-} 1), y_2 = z_1, x_3 = \alpha_3(x_1 \dot{-} 1), y_3 = y_1 + 1,$$

$$x_4 = \alpha_2(x_1 \dot{-} 1), y_4 = z_3, x_5 = \alpha_4(x_1 \dot{-} 1), y_5 = y_1 + 1,$$

і покладемо

$$A((x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_5, y_5, z_z)) = (0, 0, \gamma(0)),$$

якщо хоча б одна з цих умов не справджується. Позначимо через M_0 сукупність трійок вигляду $(0, x, \gamma(x))$, яка очевидно є рекурсивно-зліченною. Якщо $F = \{A, B\}$, то за наслідком 2.5, множина $\overline{M_0^F}$ є рекурсивно-зліченною. Залишилося переконатися, що вона збігається з графіком M. $\square$

Означення 2.12. *Нехай $\mathcal{K}$ - деякий клас функцій (наприклад клас примітивно-рекурсивних функцій). Частково визначена функція $U(y, x_1, x_2, \ldots, x_k)$ називається* **універсальною функцією для класу** $\mathcal{K}$ *, якщо*

i) $\forall a \in \mathbb{N}^+ \quad U(a, x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathcal{K}$;

ii) для довільної функції $f \in \mathcal{K}$ існує $a \in \mathbb{N}^+$:

$$U(a, x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

При цьому, число n називають номером функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

Зауважимо, що функція може мати безліч номерів, що відповідає тому, що функція має безліч програм для обчислення її значень.

В якості прикладу, побудуємо універсальну функцію для класу примітивно рекурсивних функцій від однієї змінної. Для спрощення побудови скористаємося теоремою Робінсона.

Згідно цієї теореми довільна примітивно рекурсивна функція є значенням певного терму (функціональної форми), складеного з символів N, q і функціональних символів $+, *, J$. Визначимо нумерацію ν термів індуктивно:

$$\nu(N) = 1, \quad \nu(q) = 3 \tag{2.3.5}$$

$$\nu(t_1 + t_2) = 2 \cdot 3^{\nu(t_1)} \cdot 5^{\nu(t_2)} \tag{2.3.6}$$

$$\nu(t_1 * t_2) = 4 \cdot 3^{\nu(t_1)} \cdot 5^{\nu(t_2)} \tag{2.3.7}$$

$$\nu(Jt) = 8 \cdot 3^{\nu(t)}. \tag{2.3.8}$$

Приклад. Функція $J(N + Jq)$ має номер

$$\nu(J(N + Jq)) = 8 \cdot 3^{\nu(N+Jq)} = 8 \cdot 3^{2 \cdot 3^1 \cdot 5^{\nu(Jq)}} = 8 \cdot 3^{2 \cdot 3^1 \cdot 5^{8 \cdot 3^3}}$$

Питання. Порахуйте скільки десяткових цифр має це число. Визначимо нову функцію

$$U(n, x) = f_n(x),$$

де f_n - примітивно-рекурсивна функція, яку обчислює програма, що має номер n, тобто $\nu(f_n(x)) = n$. Оскільки, не всі натуральні числа є номерами термів, то ця функція є частково визначеною. З означення випливає, що

$$U(n, x) = \begin{cases} f_k(x) + f_l(x) & \text{якщо} \quad n = \quad 2 \cdot 3^k \cdot 5^l \\ f_k(f_l(x)) & \text{якщо} \quad n = \quad 4 \cdot 3^k \cdot 5^l \\ f_k(f_n(x-1)) & \text{якщо} \quad n = \quad 8 \cdot 3^k, \ x > 0 \\ 0 & \text{якщо} \quad n = \quad 8 \cdot 3^k, \ x = 0 \\ q(x) & \text{якщо} \quad n = \quad 3 \\ N(x) & \text{якщо} \quad n = \quad 1 \end{cases} \tag{2.3.9}$$

Доозначимо функцію U поклавши: $U(n, x) = Z(x)$, для всіх n, які мають дільники відмінні від $2, 3, 5$, а також діляться на 40. Для зручності введемо в розгляд предикат $\Lambda(x)$, який приймає значення 1 саме для таких n. Довести примітивну-рекурсивність цього предикату пропонуємо самостійно.

Тоді маємо таке рекурентне означення:

$$U(n, x) = \begin{cases} U(ex_1(n), x) + U(ex_2(n), x) & \text{якщо} \quad ex_0(n) = \quad 1 \\ U(ex_1(n), (U(ex_2(n), x)) & \text{якщо} \quad ex_0(n) = \quad 2 \\ U(ex_1(n), U(n, x-1)) & \text{якщо} \quad ex_0(n) = \quad 3, \ x > 0 \\ 0 & \text{якщо} \quad ex_0(n) = \quad 3, \ x = 0 \\ q(x) & \text{якщо} \quad n = \quad 3 \\ N(x) & \text{якщо} \quad n = \quad 1 \\ 0 & \text{якщо} \quad n : \ \Lambda(n) = \quad 1 \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Для того щоб за цими формулами можна було вираховувати значення функції U для довільних n та x, треба її визначити в точках $(n,0), n>0$ (див. 3-й рядок) і в точках $(0,x)$. Покладемо

$$U(n,0)=\begin{cases} U(ex_1(n),0)+U(ex_2(n),0) & \text{якщо} \quad ex_0(n)= \quad 1 \\ U(ex_1(n),(U(ex_2(n),0)) & \text{якщо} \quad ex_0(n)= \quad 2 \\ 0 & \text{якщо} \quad ex_0(n)= \quad 3,\ x=0 \\ 0 & \text{для решти значень} \quad n \end{cases} \tag{2.3.11}$$

$$U(0,x)=Z(x). \tag{2.3.12}$$

Теорема 2.14. *Функція $U(n,x)$ є універсальною функцією класу примітивно рекурсивних функцій від однієї змінної, і вона є загально-рекурсивною.*

Доведення. Як видно з формул (2.3.10),(2.3.11) функція $U(n,x)$ отримується за допомогою схеми рекурсії 2-го ступеня, описаної в теоремі (2.13), а отже вона є загально-рекурсивною.

□

Теорема 2.15. *Універсальна функція класу примітивно рекурсивних функцій від однієї змінної* **не** *є примітивно рекурсивною.*

Доведення. Доведення проведемо від супротивного. Припустимо, що $U(y,x)-$ універсальна функція вказаного класу і вона сама є примітивно рекурсивною функцією. Тоді функція від однієї змінної $g(x)=U(x,x)+1$ також буде примітивно рекурсивною. За означенням універсальної функції п. $ii)$ існує $a^*\in\mathbb{N}^+$:

$$U(a^*,x)=g(x)=U(x,x)+1.$$

Покладемо в отриманій рівності $x=a^*$ і прийдемо до суперечності

$$U(a^*,a^*)=U(a^*,a^*)+1, \tag{2.3.13}$$

яка і доводить твердження. □

Наслідок 2.6. *Множина $W=\{x|\overline{sg}\,(U(x,x))=1\}$ не є примітивно-рекурсивною, але є загально-рекурсивною.*

Доведення. Дійсно, якби W була примітивно-рекурсивною, то такою була би і функція $\overline{sg}\,(U(x,x))$. Оскільки функція $U(n,x)$ є універсальною для класу примітивно-рекурсивних функцій, то має існувати

$$n^*\in\bar{\mathbb{N}}:U(n^*,x)=\overline{sg}\,(U(x,x)).$$

Поклавши в цій рівності $x=n^*$, приходимо до суперечності: $U(n^*,n^*)=\overline{sg}\,(U(n^*,n^*))$, яка і доводить наслідок. □

Маючи універсальну функцію класу примітивно-рекурсивних функцій від однієї змінної $U(n,x)$, легко побудувати універсальну функції $U^n(x_0,x_1,\dots,x_n)-$ для класу примітивно-рекурсивних функцій від n змінних.

$$U^1(x_0,x_1)=U(x_0,x_1), U^n(x_0,x_1,\dots,x_n)=U(x_0,c^n(x_1,\dots,x_n)).$$

Нехай $g(x_1,\dots,x_n))-$ примітивно-рекурсивна, тоді $\phi(t)=g(\pi_1^n(t),pi_2^n(t),\dots,\pi_n^n(t)))$ є примітивно-рекурсивною функцією від однієї змінної. Отже, існує
$a\in\bar{\mathbb{N}}:U(a,t)=\phi(t)=g(x_1,\dots,x_n)$, де $t-$ канторовий номер набору $(x_1,\dots,x_n)$.

2.4 Клас частково-рекурсивних функцій.

Теорема 2.16. *Для того щоб частково-визначена функція була частково-рекурсивною необхідно і достатньо, щоб її графік був рекурсивно-зліченною множиною.*

Доведення. $\Leftarrow$. Нехай $M=(x,f(x))-$ рекурсивно-зліченна множина. Тоді існує примітивно-рекурсивна функція $\phi(t):Im\phi=M$. Тоді маємо рівність

$$f(x)=r(\phi(\mu_t[|l(\phi(t))-x]=0|)),$$

яка і доводить достатність.

$\Rightarrow$. Для доведення необхідності досить показати, що застосування операторів підстановки, примітивної рекурсії та мінімізації до функцій з рекурсивно-зліченними графіками приводить до функцій з рекурсивно-зліченними графіками.

1. Оператор підстановки. Якщо графіки G,G_1 функцій $y=g(x),y=g_1(x)$ є рекурсивно-зліченними, то існують примітивно-рекурсивні функції $\alpha_1(t),\alpha_2(t),\beta_1(t),\beta_2(t)$:

$$G=\{(\alpha_1(t),\alpha_2(t)|t\in\bar{\mathbb{N}}\}, G_1=\{(\beta_1(t),\beta_2(t)|t\in\bar{\mathbb{N}}\}.$$

Покажемо, що графік M функції $y-g(g_1(x))$ також допускає таку примітивно-рекурсивну параметризацію. Справді умова $(x,y)\in M$ означає, що існує $y_1:(x,y_1)\in G_1\wedge(y_1,y)\in G$. Враховуючи параметризацію, це можна записати так:

$$\exists t_1,\exists t_2\beta_1(t_1)=x\wedge\beta_2(t_1)=\alpha_1(t_2)\wedge\alpha_2(t_2)=y.$$

Введемо в розгляд функцію h :

$$h(x,y,t_1,t_2)=|x-\beta_1(t_1)|+|\beta_2(t_1)-\alpha_1(t_2)|+|\alpha_2(t_2)-y|.$$

Тоді графік M складається з усіх пар (x,y) для яких рівняння

$$h(x,y,t_1,t_2)=0$$

має розв'язок, а така множина є рекурсивно-зліченною.

2. Оператор примітивної рекурсії. Нехай

$$f(x,0)=g(x),\quad f(x,y+1)=h(f(x,y))$$

і графік функції h має таку параметризацію $\Gamma = \{(\alpha(t), \beta(t))|t \in \bar{\mathbb{N}}\}$. Розіб'ємо графік M функції $y = f(x$ на дві частини:

$$M_0 = \{(x, 0, g(x))|x \in \bar{\mathbb{N}}\}, M_1 = \{(x, y, f(x, y)|x, y \in \bar{\mathbb{N}}, y \neq 0\}.$$

Множина M_0 є рекурсивно-здіченною, бо графік функції $y = g(x)$ є такою множиною. Приналежність $(x, y, z) \in M_1$ означає, що існують $t_1, t_2, \ldots, t_y$:

$$\alpha(t_1) = x, \alpha(t_2) = \beta(t_1), \alpha(t_3) = \beta(t_2), \ldots \alpha(t_y) = \beta(t_{\delta(y)}), \beta(t_y) = z.$$

Ці рівності еквівалентні одній

$$|\alpha(t_1) - x| + \sum_{i=1}^{\delta(y)} |\alpha(t_{i+1}) - \beta(t_i)| + |\beta(t_y) - z| = 0.$$

За лемою 2.6, примітивно-рекурсивна функція Гьоделя $\Gamma(u, x)$, яка визначена формулою 2.2.8, має таку властивість: для довільних $t_1, t_2, \ldots, t_y$ система рівнянь:

$$\{\Gamma(u, i) = t_i \ , (i = 1, 2, \ldots, y)$$

має розв'язок u. Підстановкою в попередню рівність отримуємо

$$|\alpha(\Gamma(u, 1)) - x| + \sum_{i=1}^{\delta(y)} |\alpha(\Gamma(u, i+1)) - \beta(\Gamma(u, i))| + |\beta(\Gamma(u, y)) - z| = 0.$$

Ліва частина цієї рівності є примітивно-рекурсивна функція $w = w(x, y, z, u)$, причому трійка $(x, y, z) \in M_1$ тоді і лише тоді коли рівняння $w(x, y, z, u) = 0$ має розв'язок. Отже, M_1 і M є рекурсивно-зліченними множинами.

3. Оператор мінімізації. Покажемо, що якщо частково-визначена функція має рекурсивно-зліченний графік, то функція

$$f(x) = \mu_y[g(x, y) = 0]$$

також має рекурсивно-зліченний графік. За теоремою 2.6 про примітивно-рекурсивну параметризацію рекурсивно-зліченних множин, існує така параметризація для графіка $G = \{(x, y, g(x, y))|x, y \in \bar{\mathbb{N}}\}$:

$$G = \{(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))|t \in \bar{\mathbb{N}}\},$$

де $\alpha, \beta, \gamma-$ примітивно-рекурсивні функції. Якщо часткова функція f визначена в точці x і приймає значення $y = f(x)$, то це еквівалентно існуванню чисел $a_0, a_1, \ldots, a_y \in \bar{\mathbb{N}}$, які задовольняють умовам

$$g(x, i) = a_i : \quad \forall i < y \ \ a_i \neq 0, \quad a_y = 0.$$

Враховуючи параметризацію графіка G ці умови можна переформулювати наступним чином:

існують числа $t_0, t_1, \ldots, t_y$:

$$\alpha(t_j) = x, \beta(t_j) = j, \quad \gamma(t_j) \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, y,$$

$$\alpha(t_y) = x, \beta(t_y) = y, \quad \gamma(t_y) = 0.$$

Ці умови можна записати одним співвідношенням

$$\sum_{i=0}^{y} (|\alpha(t_i) - x| + |\beta(t_i) - i|) + y \cdot \overline{sg} \left(\prod_{i=0}^{y \dot{-} 1} \gamma(t_i) \right) + \gamma(t_y) = 0.$$

Знову скористаємося функцією Гьоделя і покладемо $t_i = \Gamma(u, i)$. Покладемо

$$h(x, y, u) = \sum_{i=0}^{y} (|\alpha(\Gamma(u, i)) - x| + |\beta(\Gamma(u, i)) - i|) + y \cdot \overline{sg} \left(\prod_{i=0}^{y \dot{-} 1} \gamma(\Gamma(u, i)) \right) + \gamma(\Gamma(u, y)).$$

Тут записана ліва частина попередньої рівності, де зроблена заміна $t_i = \Gamma(u, i)$. Якщо $M = (x, f(x))-$ графік функції $f(x)$, то маємо

$$(x, y) \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \ (h(x, y, u) = 0).$$

Оскільки функція h є примітивно-рекурсивною, то графік M є рекурсивно-зліченною множиною. □

Наслідок 2.7. *Область визначення частково-рекурсивної функції є рекурсивно-зліченною множиною.*

Дійсно, за попередньою теоремою, графік цієї функції

$$M = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_m(t), \alpha_{m+1}(t))\}$$

є рекурсивно-зліченною множиною. Тоді для області визначення маємо параметризацію $\{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_m(t)) | t \in \bar{\mathbb{N}}\}$ і отже вона є рекурсивно-зліченною множиною.

Наслідок 2.8. *Сукупність значень частково-рекурсивної функції є рекурсивно-зліченною множиною.*

Ця сукупність є областю значень примітивно-рекурсивної функції $\alpha_{m+1}(t)$, а отже є рекурсивно-зліченною.

Нагадаємо, шо частково-характеристична функція множини A визначається наступним чином

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо} \quad x \in A \\ \text{не визначена} & \text{якщо} \quad x \notin A \end{cases}$$

Наслідок 2.9. *Множина $A \subset \bar{\mathbb{N}}^k$ є рекурсивно-зліченною тоді і тільки тоді, коли її частково-характеристична функція є частково-рекурсивною.*

Доведення. $\Rightarrow$ Нехай $A \neq \emptyset$– рекурсивно-зліченна, тоді вона має примітивно-рекурсивну параметризацію

$$A = \{(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) | t \in \bar{\mathbb{N}}\}.$$

Тоді множина $\{(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t), 1) | t \in \bar{\mathbb{N}}\}$ є графіком її частково-характеристичної функції і є рекурсивно-зліченною. Тоді, за попередньою теоремою, сама частково-характеристичної функція є частково-рекурсивною.

$\Leftarrow$. Достатність випливає з того, що множина A є областю визначення частково-рекурсивної функції. □

Наслідок 2.10. *Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n)$– частково-рекурсивна функція. Тоді множина тих наборів $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ для яких рівняння*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

має розв'язок відносно невідомих y_j є рекурсивно-зліченною множиною.

Доведення. Для графіка цієї функції існує примітивно-рекурсивна параметризація:

$$\{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_m(t), \beta_1(t), \beta_1(t), \ldots, \beta_n(t), \alpha(t)) | t \in \bar{\mathbb{N}}\}.$$

Тоді множина значень $t : \alpha(t) = 0$ є рекурсивно-зліченною, а отже і снує примітивно-рекурсивна функція $\psi(x)$ множина значень якої збігається з множиною розв'язків рівняння $\alpha(t) = 0$. Тепер для множини наборів $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, для яких рівняння $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ має розв'язок можна побудувати примітивно-рекурсивну параметризацію:

$$\{(\alpha_1(\psi(x)), \alpha_2(\psi(x)), \ldots, \alpha_m(\psi(x)) | x \in \bar{\mathbb{N}}\},$$

яка і доводить рекурсивну-зліченність цієї множини. □

Наслідок 2.11. *Якщо функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ є частково-рекурсивна функція, то множина її нулів, тобто розв'язків рівняння $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ є рекурсивно-зліченною множиною.*

Доведення. Справді, функція $\alpha(x) = \mu_t[x + t = 0]$ визначена лише при $x = 0$, отже, сукупність розв'язків рівняння $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$ збігається з областю визначення частково-рекурсивної функції $\alpha(f)$. □

Теорема 2.17. *(теорема Кліні про нормальну форму.)*

Для кожної частково-рекурсивної функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ існує примітивно-рекурсивна функція $F(x_1, x_2, \ldots, x_s, t)$ така, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = l(\mu_t[F(x_1, x_2, \ldots, x_s, t) = 0]).$$

Доведення. Графік M функції f є рекурсивно-зліченною множиною, а отже існує примітивно-рекурсивна функція $g(x_1, x_2, \ldots, x_s, y, a)$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_s, y) \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists a : g(x_1, x_2, \ldots, x_s, y, a) = 0.$$

Покладемо $t = c(y, a)$, тоді умову можна записати таким чином

$$(x_1, x_2, \ldots, x_s, y) \in M \quad \Leftrightarrow \quad \exists t : (g(x_1, x_2, \ldots, x_s, l(t), r(t)) = 0 \wedge y = l(t)).$$

Зокрема, якщо для деяких $x_1, x_2, \ldots, x_s, t$ має місце $g(x_1, x_2, \ldots, x_s, l(t), r(t)) = 0$, то $(x_1, x_2, \ldots, x_s, l(t)) \in M$, звідки $l(t) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, тобто

$$l(\mu_t[g(x_1, x_2, \ldots, x_s, l(t), r(t)) = 0]) = f(x_1, x_2, \ldots, x_s).$$

Зауважимо, що для наборів $x_1, x_2, \ldots, x_s$, для яких значення функції f не визначене значення лівої частини цієї рівності є також не визначеним. Отже, для завершення доведення залишилось покласти $F(x_1, x_2, \ldots, x_s, t) = g(x_1, x_2, \ldots, x_s, l(t), r(t))$. $\square$

Теорема 2.18. *Частково-рекурсивна функція*

$$W = W(x_0, x_1, \ldots, x_s) = l(\mu_t[U^{s+1}(x_0, x_1, \ldots, x_s, t) = 0])$$

є універсальною для класу частково-рекурсивннх функцій від s змінних. (Тут U^{s+1}- універсальна функція для класу примітивно-рекурсивних функцій від $s+1$ змінної.)

Доведення. Нехай функція f з вказаного класу, тоді вона має зображення Кліні:

$$[f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = l(\mu_t[F(x_1, x_2, \ldots, x_s, t) = 0].$$

Оскільки F є примітивно-рекурсивною, то існує таке $a \in \bar{\mathbb{N}}$, що

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_s, t) = U^{s+1}(a, x_1, \ldots, x_s, t) = 0,$$

звідки отримуємо,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = W(a, x_1, \ldots, x_s).$$

$\square$

Наслідок 2.12. *1. Існує частково-рекурсивна функція від однієї змінної, областю значень якої є $\{0, 1\}$ і яка не може бути розширена до загально-рекурсивної функції.*

Доведення. Розглянемо часткову функцію

$$V(x) = \overline{sg}(W(x, x)),$$

яка є частково-рекурсивною і приймає лише два значення $0, 1$. Припустимо, що вона має рекурсивне доозначення $\widetilde{V}(x)$. Тоді існує $a \in \bar{\mathbb{N}}$: $\widetilde{V}(x) = W(a, x)$, причому рівність має місце для всіх x. Отримуємо суперечність $\overline{sg}(W(x, x)) = W(x, x)$. $\square$

Наслідок 2.13. *Ніяка частково-рекурсивна функція, яка є універсальною для класу частково-рекурсивних функцій від однієї змінної не має рекурсивних доозначень.*

Доведення. Якби така функція W малі б таке доознаяення $\widetilde{W}$, то функція $\overline{sg}W(x,x)$ була б рекурсивним доозначенням вищезгаданої функції V. □

Наслідок 2.14. *Існують нерекурсивні рекурсивно-зліченні множини.*

Доведення. Покладемо $E(x) = \overline{sg}(W(x,x))$, яка є частково-рекурсивною і не має рекурсивних доозначень. Нехай M_1- множина розв'язків рівняння $E(x) = 1$. За раніше доведеним наслідком множина M_1 є рекурсивно-зліченною. Покажемо, що вона не є рекурсивною. Припустимо, $\chi_M(x)-$ характеристична функція є загальнорекурсивною. Тоді $\chi_M(x) = 1 \Leftrightarrow E(x) = 1$ і $\chi_M(x) = 0 \Leftrightarrow E(x) \neq 1$. Тобто $\chi_M(x)$ є рекурсивним доозначенням функції $E(x)$. Отримана суперечність доводить, що множина M_1 не є рекурсивною. □

Наслідок 2.15. *Існують примітивно-рекурсивні функції область значень яких не є рекурсивною.*

Доведення. Дійсно, побудована множина M_1 є рекурсивно-зліченною, а отже є множиною значень деякої примітивно-рекурсивної функції. □

2.5 Алгоритмічно нерозв'язні проблеми.

Проблема. Чи існує алгоритм, який би отримавши на вхід програму обчислення довільної частково-рекурсивної функції від однієї змінної та число $n \in \bar{\mathbb{N}}$ відповідав би на питання: чи визначено значення цієї функції в точці n?

Припустимо, що такий алгоритм існує. Якщо $W(n,x)-$ універсальна частково-рекурсивна функція класу частково-рекурсивних функцій від однієї змінної, то згідно концепції К. Гьоделя, має існувати частково-рекурсивний предикат A такий, що

$$A(n,x) = \begin{cases} 1 & \text{якщо значення} \quad W(n,x) \ \text{ є визначеним} \\ 0 & \text{якщо значення} \quad W(n,x) \ \text{ не є визначеним} \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Побудуємо частково-рекурсивну функцію

$$B(x) = \mu_t[A(x,x) + t = 0]. \tag{2.5.2}$$

З означення випливає, що $B(x)$ є визначеним в точці x і приймає значення 0 тоді і тільки тоді, коли $A(x,x) = 0$, для всіх інших x значення $B(x)$ не визначено. Отже,

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо значення} \quad W(x,x) \ \text{ не є визначеним} \\ \text{не є визначеним} & \text{якщо значення} \quad W(x,x) \ \text{ є визначеним} \end{cases}$$

Оскільки $B(x)$ є частково-рекурсивною функцією, то існує номер

$$n^* \in \bar{\mathbb{N}}: \quad W(n^*, x) = B(x). \tag{2.5.3}$$

Питання. Чи визначено значення функції $B(x)$ в точці n^* ?

Якщо так, то цим значенням може бути лише 0, а тоді $0 = B(n^*) = W(n^*, n^*)$, звідки, згідно (2.5.2), $A(n^*, n^*) = 0$, а за означенням (2.5.1) предиката A, маємо що значення W в точці (n^*, n^*) не є визначеним. Але тоді (див. (2.5.3)) і значення функції B в точці n^* також є невизначеним.

Припустимо тепер, що значення функції $B(x)$ в точці n^* не є визначеним. Тоді згідно (2.5.2), $A(n^*, n^*) = 1$ і за визначенням (2.5.1) значення W в точці (n^*, n^*) є визначеним. Звідки, за формулою (2.5.3), є визначеним значення функції B в точці n^*.

Таким чином припустивши існування алгоритму, що відповідає на питання чи визначена дана частково-рекурсивна функція в даній точці ми прийшли до суперечності.