§ 10. Криволинейные интегралы

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Криволинейные интегралы первого рода. Пусть спрямляемая кривая Γ задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S, \tag{1}$$

где s — переменная длина дуги этой кривой. Тогда, если на кривой Γ определена функция F, то число

$$\int\limits_0^S F(\mathbf{r}(s))\,ds$$

называют *криволинейным интегралом первого рода* от функции F по кривой Γ и обозначают

$$\int\limits_\Gamma F(x;y;z)\,ds \quad \text{или, короче,} \quad \int\limits_\Gamma F\,ds.$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_\Gamma F(x;y;z)\,dx = \int\limits_0^S F(x(s);y(s);z(s))\,ds. \tag{2}$$

Интеграл (2) существует, если функция F непрерывна на кривой Γ.

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

2) Если кривая Γ есть объединение конечного числа кривых $\Gamma_1, \ldots$ $\ldots, \Gamma_k$, а функция F непрерывна на Γ, то

$$\int\limits_\Gamma F(x;y;z)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\Gamma_i} F(x;y;z)\,ds. \tag{3}$$

3) Если гладкая кривая Γ задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \tag{4}$$

а функция F непрерывна на кривой Γ, то

$$\int\limits_\Gamma F(x;y;z)\,ds = \int\limits_\alpha^\beta F(x(t);y(t);z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt. \tag{5}$$

Если Γ — гладкая плоская кривая, заданная уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{6}$$

то

$$\int\limits_\Gamma F(x;y)\,dx = \int\limits_a^b F(x;f(x))\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{7}$$

Аналогично, если гладкая плоская кривая Γ задана уравнением

$$x = \varphi(y), \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

то

$$\int\limits_{\Gamma} F(x; y)\, dx = \int\limits_{c}^{d} F(\varphi(y); y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\, dy. \tag{8}$$

2. Криволинейные интегралы второго рода. Пусть гладкая кривая Γ задана уравнением (1). Тогда

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \boldsymbol{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) \tag{9}$$

— единичный вектор касательной к этой кривой. Здесь α, β, γ — углы, образованные касательной с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Пусть на кривой Γ определена вектор-функция $\mathbf{F} = (P; Q; R)$ такая, что для скалярной функции

$$F_\tau = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + P\cos\gamma$$

существует $\int\limits_{\Gamma} F_\tau\, ds$. Тогда число

$$\int\limits_{\Gamma} F_\tau\, ds = \int\limits_{\Gamma} (\mathbf{F}, \boldsymbol{\tau})\, ds \tag{10}$$

называют *криволинейным интегралом второго рода* от функции $\mathbf{F}$ по кривой Γ и обозначают

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

Таким образом, по определению

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{0}^{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, ds, \tag{11}$$

где $(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$ — единичный вектор касательной к кривой Γ.

Формулу (11) можно записать в векторной форме:

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{0}^{S} (\mathbf{F}(\mathbf{r}(s)), \boldsymbol{\tau}(s))\, ds, \tag{12}$$

где $d\mathbf{r} = (dx; dy; dz)$.

Если $Q = R = 0$, то формулу (11) записывают в виде

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx = \int\limits_{0}^{S} P(x(s); y(s); z(s))\cos\alpha(s)\, ds. \tag{13}$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\Gamma} Q\, dy = \int\limits_{0}^{S} Q\cos\beta\, ds, \qquad \int\limits_{\Gamma} R\, dz = \int\limits_{0}^{S} R\cos\gamma\, ds. \tag{14}$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) При изменении ориентации кривой на противоположную криволинейный интеграл второго рода меняет знак.

2) Если гладкая кривая Γ задана уравнением (4), а вектор-функция $\mathbf{F} = (P; Q; R)$ непрерывна на Γ, то

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}, \mathbf{r}'(t))\, dt, \tag{15}$$

или

$$\int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(x(t); y(t); z(t))x'(t) + \\ + Q(x(t); y(t); z(t))y'(t) + R(x(t); y(t); z(t))z'(t)]\, dt. \tag{16}$$

В случае, когда Γ — плоская гладкая кривая, заданная уравнением (6), из формулы (16) следует, что

$$\int\limits_{\Gamma} P(x; y)\, dx = \int\limits_{a}^{b} P(x; f(x))\, dx, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Gamma} Q(x; y)\, dy = \int\limits_{a}^{b} Q(x; f(x)) f'(x)\, dx. \tag{18}$$

3. Формула Грина. Пусть граница Γ плоской ограниченной области G состоит из конечного набора кусочно гладких кривых. Тогда, если функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны на $\overline{G}$, то справедлива *формула Грина*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \int\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy, \tag{19}$$

где контур Γ ориентирован так, что при его обходе область G остается слева.

Из формулы (19) при $Q = x$, $P = -y$ получаем

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} x\, dy - y\, dx, \tag{20}$$

где $S = \iint\limits_{G} dx\, dy$ — площадь области G, ограниченной контуром Γ (при обходе контура Γ область G остается слева).

4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Если функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ непрерывны в плоской области G, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\, dx + Q\, dy \tag{21}$$

не зависит от пути интегрирования Γ_{AB} (кривая Γ_{AB} лежит в области G, A — ее начало, B — конец) тогда и только тогда, когда выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u = u(x;y)$, т. е. в области G выполняется условие

$$du = P\,dx + Q\,dy \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q. \tag{22}$$

При этом

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A). \tag{23}$$

Здесь

$$u(x;y) = \int\limits_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx + Q\,dy, \tag{24}$$

где Γ_{M_0M} — некоторая кривая с началом в фиксированной точке $M_0(x_0;y_0)$ и концом в точке $M(x;y)$, лежащая в области G.

Пусть функции P, Q, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в плоской области G. Тогда для того чтобы криволинейный интеграл (21) не зависел от пути интегрирования, необходимо, а в случае, когда G — односвязная область, то и достаточно, чтобы в области G выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{25}$$

5. Некоторые приложения криволинейных интегралов. Пусть на кусочно гладкой кривой Γ распределена масса с линейной плоскостью $\rho(x;y;z)$ (или $\rho(x;y)$ для плоской кривой).

Массу кривой вычисляют по формуле

$$m = \int\limits_{\Gamma} \rho(x;y;z)\,ds, \tag{26}$$

координаты центра масс — по формулам

$$x_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} x\rho\,ds, \quad y_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} y\rho\,ds, \quad z_C = \frac{1}{m}\int\limits_{\Gamma} z\rho\,ds, \tag{27}$$

моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz — по формулам

$$I_x = \int\limits_{\Gamma}(y^2+z^2)\rho\,ds, \quad I_y = \int\limits_{\Gamma}(z^2+x^2)\rho\,ds, \quad I_z = \int\limits_{\Gamma}(x^2+y^2)\rho\,ds. \tag{28}$$

Пусть на области Ω задана вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки из Ω, тогда говорят, что на Ω задано *векторное* (*силовое*) *поле.* Пусть Γ — кусочно гладкая ориентированная кривая в Q и векторное поле $\mathbf{F}$ непрерывно на Γ.

Работой поля $\mathbf{F}$ вдоль Γ называют интеграл

$$A = \int\limits_{\Gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}. \tag{29}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} (x+y)\,ds,$$

где Γ — граница треугольника (рис. 10.1) с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$.

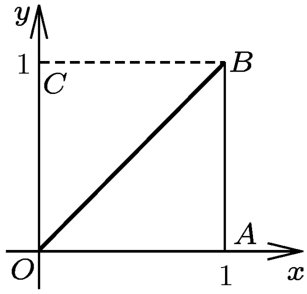

Рис. 10.1

▲ Пусть I_1, I_2, I_3 — криволинейные интегралы от функции $x+y$ по отрезкам AB, BO и OA соответственно. Так как отрезок AB задается уравнением $x=1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то по формуле (8) получаем

$$I_1 = \int\limits_0^1 (y+1)\,dy = \frac{3}{2}.$$

Отрезки BO и OA задаются соответственно уравнениями $y=x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, и $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. По формуле (7) находим

$$I_2 = \int\limits_0^1 2x\sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}, \quad I_3 = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 2 + \sqrt{2}$. ▲

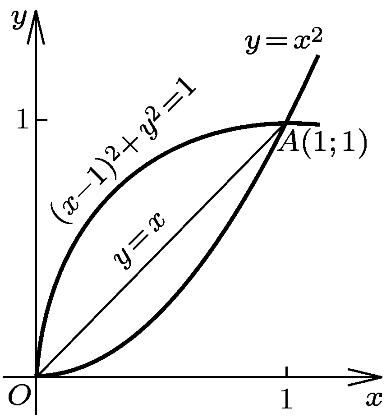

Рис. 10.2

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{\Gamma} y\,dx + x\,dy$$

по кривой Γ с началом $O(0;0)$ и концом $A(1;1)$, если (рис. 10.2):

1) Γ — отрезок OA;

2) Γ — дуга параболы $y=x^2$;

3) Γ — дуга окружности радиуса 1 с центром в точке $(1;0)$.

▲ 1) Так как отрезок OA задается уравнением $y=x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, то, применяя формулы (17) и (18), находим

$$I = \int\limits_0^1 x\,dx + \int\limits_0^1 x\,dx = 1.$$

2) Если Γ — дуга параболы, то

$$\int\limits_{\Gamma} y\,dx = \int\limits_0^1 x^2\,dx, \quad \int\limits_{\Gamma} x\,dy = \int\limits_0^1 2x^2\,dx, \quad I = \int\limits_0^1 3x^2\,dx = 1.$$

3) Так как уравнение дуги окружности можно записать в виде

$$x = 1+\cos t, \quad y = \sin t,$$

где t меняется от π до $\pi/2$, то по формуле (16) получаем

$$I = \int\limits_{\pi}^{\pi/2} \sin t(-\sin t)\,dt + \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (1+\cos t)\cos t\,dt =$$
$$= \int\limits_{\pi}^{\pi/2} (\cos t + \cos 2t)\,dt = 1. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 3. Вычислить с помощью формулы Грина криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{G} x^2 y\,dx - xy^2\,dy,$$

где Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

▲ Воспользуемся формулой (19), где

$$P = x^2 y, \quad Q = -xy^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2.$$

Тогда

$$I = -\iint\limits_{D} (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

где D — круг радиуса R с центром в точке $(0;0)$. Переходя к полярным координатам, получаем

$$I = -\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} r^3\,dr = -\frac{\pi R^4}{2}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 4. Пользуясь формулой (20), найти площадь S, ограниченную астроидой

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

▲ Применяя формулы (20) и (16), получаем

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt = \frac{3a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} (\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)\,dt =$$
$$= \frac{3a^2}{8}\int\limits_{0}^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int\limits_{0}^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt = \frac{3\pi a^2}{8}. \ \blacktriangle$$

П р и м е р 5. Показать, что криволинейный интеграл

$$I = \int\limits_{AB} (3x^2 y + y)\,dx + (x^3 + x)\,dy,$$

где $A(1;-2)$, $b(2;3)$, не зависит от пути интегрирования, и вычислить этот интеграл.

▲ Так как функции $P = 3x^2y + y$, $Q = x^3 + x$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ непрерывны в R^2 и выполняется условие (25), то интеграл не зависит от пути интегрирования и выражается формулой (23).

Функцию $u(x;y)$ можно найти по формуле (24). Заметим, однако, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, так как

$$(3x^2 + y)\,dx + (x^3 + x)\,dy = (3x^2y\,dx + x^3\,dy) + (y\,dx + x\,dy) = \\ = d(x^3y) + d(xy) = d(x^3y + xy) = du.$$

Следовательно, $u = x^3y + xy$, и по формуле (23) находим

$$I = u(B) - u(A) = 30 - (-4) = 34. \ \blacktriangle$$

ЗАДАЧИ

1. Вычислить криволинейный интеграл первого рода по плоской кривой Г:

1) $\int\limits_{\Gamma} ds$, Г — отрезок с концами $(0;0)$ и $(1;2)$;

2) $\int\limits_{\Gamma} (2x + y)\,ds$, Г — ломаная $ABOA$, где $A(1;0)$, $B(0;2)$, $O(0;0)$;

3) $\int\limits_{G} (x + y)\,ds$, Г — граница треугольника с вершинами $(0;0)$; $(1;0)$ и $(0;1)$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{ds}{y - x}$, Г — отрезок с концами $(0;-2)$ и $(4;0)$;

5) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, Г — отрезок с концами $(0;0)$ и $(1;2)$.

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\Gamma} xy\,ds$, если:

1) Г — граница квадрата с вершинами $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$;

2) Г — четверть эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, лежащая в I квадранте;

3) Г — граница прямоугольника с вершинами $(0;0)$, $(4;0)$, $(4;2)$, $(0;2)$.

3. Пусть Г — гладкая кривая, заданная в полярных координатах $(r;\varphi)$ уравнением $r = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, а функция $F(x;y)$ непрерывна на Г. Доказать, что

$$\int\limits_{\Gamma} F(x;y)\,ds = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(\rho(\varphi)\cos\varphi; \rho(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi. \tag{30}$$

Вычислить криволинейный интеграл по плоской кривой Γ (4–11).

4. $\int\limits_{\Gamma} x^2\,ds$, Γ — дуга окружности $x^2+y^2=a^2$, $y \geqslant 0$.

5. $\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)^n\,ds$, Γ — окружность $x^2+y^2=a^2$.

6. $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dx$, Γ — окружность $x^2+y^2=ax$, если:

1) $f(x;y)=x-y$; 2) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

7. $\int\limits_{\Gamma} f(x;y)\,ds$, Γ — правый лепесток лемнискаты, заданной в полярных координатах уравнением $r^2=a^2\cos 2\varphi$, если:

1) $f(x;y)=x+y$; 2) $f(x;y)=x\sqrt{x^2-y^2}$.

8. $\int\limits_{\Gamma} |y|\,ds$, Γ — лемниската $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

9. $\int\limits_{\Gamma} (x^{4/3}+y^{4/3})\,ds$, Γ — астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

10. $\int\limits_{\Gamma} f(x;y)\,ds$, Γ — арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, если:

1) $f(x;y)=y$; 2) $f(x;y)=y^2$.

11. $\int\limits_{\Gamma} f(x;y)\,ds$, Γ — дуга развертки окружности

$$x=a(\cos t+t\sin t),\quad y=a(\sin t-t\cos t),\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;y)=x^2+y^2$; 2) $f(x;y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Вычислить криволинейный интеграл по пространственной кривой Γ (12–18).

12. $\int\limits_{\Gamma} f(x;y;z)\,ds$, Γ — первый виток винтовой линии

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt,$$

если:

1) $f(x;y;z)=z^2/(x^2+y^2)$; 2) $f(x;y;z)=1/(x^2+y^2+z^2)$;
3) $f(x;y;z)=x^2+y^2+z^2$.

13. $\int\limits_{\Gamma} f(x;y;z)\,ds$, Γ — дуга конической винтовой линии

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad z=t,\quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

если:

1) $f(x;y;z)=z$; 2) $f(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2}+z$.

14. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, Γ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$.

15. $\int\limits_{\Gamma} xyz\,ds$, Γ — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$, расположенная в I октанте.

16. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,ds$, Γ — четверть окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=$ $=x$, расположенная в I октанте.

17. $\int\limits_{\Gamma} x^2\,ds$, Γ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

18. $\int\limits_{\Gamma} z\,ds$, Γ — дуга кривой $x^2+y^2=z^2$, $y^2=ax$ от точки $(0;0;0)$ до точки $(a;a;a\sqrt{2})$, $a>0$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра x (19, 20).

19. 1) $\int\limits_{\Gamma} xy\,dx$, Γ — дуга синусоиды $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \left(x-\dfrac{1}{y}\right)dy$, Γ — дуга параболы $y=x^2$, $1\leqslant x\leqslant 2$;

3) $\int\limits_{\Gamma} x\,dy-y\,dx$, Γ — кривая $y=x^3$, $0\leqslant x\leqslant 2$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{y}{x}\,dx+dy$, Γ — кривая $y=\ln x$, $1\leqslant x\leqslant e$;

5) $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx+x^2\,dy$, Γ — дуга параболы $y=\dfrac{x^2}{4}$, $0\leqslant x\leqslant 2$;

6) $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx-x^2\,dy$, Γ — дуга параболы $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, $0\leqslant x\leqslant 2$.

20. 1) $\int\limits_{\Gamma} \cos y\,dx-\sin y\,dy$, Γ — отрезок прямой $y=-x$, $-2\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 2$;

2) $\int\limits_{\Gamma} (xy-y^2)\,dx+x\,dy$, Γ — кривая $y=2\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

3) $\int\limits_{\Gamma} (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, Γ — дуга параболы $y=x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 1$;

4) $\int\limits_{\Gamma} (x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy$, Γ — кривая $y=1-|x-1|$, $0\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 2$.

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Г, пробегаемой от точки A к точке B (21–25).

21. $\int\limits_{\Gamma} x\,dy - y\,dx$, $A(0;0)$, $B(1;2)$, если:

1) Г — отрезок AB; 2) Г — дуга параболы $y = 2x^2$;
3) Г — ломаная ACB, где $C(0;1)$.

22. $\int\limits_{\Gamma} xy\,dx - y^2\,dy$, Г — дуга параболы $y^2 = 2x$, $A(0;0)$, $B(2;2)$.

23. $\int\limits_{\Gamma} \frac{3x}{y}\,dx - \frac{2y^3}{x}\,dy$, Г — дуга параболы $x = y^2$, $A(4;2)$, $B(1;1)$.

24. $\int\limits_{\Gamma} \frac{x}{y}\,dx - \frac{y-x}{x}\,dy$, Г — дуга параболы $y = x^2$, $A(2;4)$, $B(1;1)$.

25. $\int\limits_{\Gamma} x\,dy$, Г — полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $A(0;-a)$, $B(0;a)$.

26. Вычислить криволинейный интеграл по отрезку AB, ориентированному в направлении от точки A к точке B:

1) $\int\limits_{\Gamma} x^3\,dy - xy\,dx$, $A(0;-2)$, $B(1;3)$;

2) $\int\limits_{\Gamma} -3x^2\,dx + y^3\,dy$, $A(0;0)$, $B(2;4)$;

3) $\int\limits_{\Gamma} (2x-y)\,dx + (4x+5y)\,dy$, $A(3;-4)$, $B(1;2)$;

4) $\int\limits_{\Gamma} (4x+5y)\,dx + (2x-y)\,dy$, $A(1;-9)$, $B(4;-3)$;

5) $\int\limits_{\Gamma} \left(\frac{x}{x^2+y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dy$, $A(1;0)$, $B(3;4)$;

6) $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, $A(0;1)$, $B(2;3)$.

Вычислить криволинейный интеграл по кривой Г, пробегаемой в направлении возрастания ее параметра t (27, 28).

27. 1) $\int\limits_{\Gamma} xy^2\,dx$, Г — дуга окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

2) $\int\limits_{\Gamma} x\,dy + y\,dx$, Г — дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$;

3) $\int\limits_{\Gamma} y\,dx - x\,dy$, Γ — эллипс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

4) $\int\limits_{\Gamma} y^2\,dx + x^2\,dy$, Γ — верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

28. 1) $\int\limits_{\Gamma} (2a - y)\,dx + (y - a)\,dy$, Γ — дуга циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, Γ — дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (29, 30).

29. 1) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\,dx$, Γ — граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 1$, $y = 5$;

2) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 - 2xy)\,dx + (x - 2y)^2\,dy$, Γ — граница прямоугольника, образованного прямыми $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$;

3) $\int\limits_{\Gamma} (3x^2 - y)\,dx + (1 - 2x)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$;

4) $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$.

30. 1) $\int\limits_{\Gamma} 2(x^2 + y^2)\,dx + (x + y)^2\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(1;1)$, $(1;3)$, $(2;2)$;

2) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, Γ — граница квадрата с вершинами $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$;

3) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{(x + y)\,dx + (y - x)\,dy}{x^2 + y^2}$, Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$;

4) $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{xy^2\,dx - x^2 y\,dy}{x^2 + y^2}$, Γ — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ, пробегаемой в направлении возрастания параметра t (31–36).

31. $\int\limits_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, Γ — виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

32. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$, Γ — кривая $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

33. $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx + z\sqrt{a^2 - y^2}\,dy + xy\,dz$, Γ — дуга винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at/(2\pi)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

34. $\int\limits_{\Gamma} (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, Γ — кривая $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\sin t\cos t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

35. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + (x + y)\,dy + (x + y + z)\,dz$, Γ — кривая $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

36. $\int\limits_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, Γ — окружность $x = a\cos\alpha\cos t$, $y = a\cos\alpha\sin t$, $z = a\sin\alpha$ ($\alpha = \mathrm{const}$).

Вычислить криволинейный интеграл второго рода по пространственной кривой Γ (37–44).

37. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y\,dy + (x + y - 1)\,dz$, Γ — отрезок AB, пробегаемый от точки $A(1;1;1)$ к точке $B(2;3;4)$.

38. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, Γ — отрезок AB, пробегаемый от точки $A(1;1;1)$ к точке $B(4;4;4)$.

39. $\int\limits_{\Gamma} x(z - y)\,dx + y(x - z)\,dy + z(y - x)\,dz$, Γ — ломаная $ABCA$, где $A(a;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C(0;0;a)$.

40. $\int\limits_{\Gamma} y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, Γ — линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$ ($R > 0$, $z \geqslant 0$), пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;0;0)$.

41. $\int\limits_{\Gamma} (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$), пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Ox.

42. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 - z^2)\,dx + (z^2 - x^2)\,dy + (x^2 - y^2)\,dz$, Γ — граница части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (лежащей в I октанте), пробегаемая по ходу часовой стрелки, если смотреть из точки $(0;0;0)$.

43. $\int\limits_{\Gamma} (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, Γ — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oy.

44. $\int\limits_{\Gamma} (y^2 + z^2)\,dx + (x^2 + z^2)\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, Γ — линия пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 = 2rx, \quad 0 < r < R, \quad z \geqslant 0,$$

пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной полуоси Oz.

Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл по замкнутой кривой Γ, пробегаемой так, что ее внутренность остается слева (45–55).

45. $\int\limits_{\Gamma} (xy + x + y)\,dx + (xy + x - y)\,dy$, если:

1) Γ — эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; 2) Γ — окружность $x^2 + y^2 = ax$.

46. $\int\limits_{\Gamma} (2xy - y)\,dx + x^2\,dy$, Γ — эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

47. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dy + y\,dx}{x^2 + y^2}$, Γ — окружность $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

48. $\int\limits_{\Gamma} (x + y)^2\,dx - (x^2 + y^2)\,dy$, Γ — граница треугольника с вершинами $(1;1)$, $(3;2)$, $(2;5)$.

49. $\int\limits_{\Gamma} (y - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$, Γ — граница кругового сектора $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha \leqslant \pi/2$, где $(r;\varphi)$ — полярные координаты.

50. $\int\limits_{\Gamma} e^x[(1 - \cos y)\,dx + (\sin y - y)\,dy]$, Γ — граница области $0 < x < \pi$, $0 < y < \sin x$.

51. $\int\limits_{\Gamma} e^{y^2 - x^2}(\cos 2xy\,dx + \sin 2xy\,dy$, Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

52. $\int\limits_{\Gamma} (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$, Γ — граница области $x^2 + y^2 < ax$, $y > 0$.

53. $\int\limits_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y}$, Γ — граница квадрата с вершинами $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$.

54. $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2}))\,dx$, Γ — окружность $x^2 + y^2 = R^2$.

55. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$, Γ — граница области, образованной отрезком AB, где $A(1;1)$, $B(2;6)$, и дугой параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки A, B, $O(0;0)$.

Убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, вычислить криволинейный интеграл по кривой Γ с началом в точке A и концом в точке B (56–68).

56. $\int\limits_{\Gamma} x\,dy + y\,dx$, $A(-1;3)$, $B(2;2)$.

57. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y\,dy$, $A(-1;0)$, $B(-3;4)$.

58. $\int\limits_{\Gamma} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, $A(2;-1)$, $B(1;0)$.

59. $\int\limits_{\Gamma} 2xy\,dx + x^2\,dy$, $A(0;0)$, $B(-2;-1)$.

60. $\int\limits_{\Gamma} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$, $A(-2;-1)$, $B(0;3)$.

61. $\int\limits_{\Gamma} (x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - y^2)\,dy$, $A(3;0)$, $A(0;-3)$.

62. $\int\limits_{\Gamma} (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx + (2xy - x^2 - 3y^2)\,dy$, $A(-1;2)$, $B(1;-2)$.

63. $\int\limits_{\Gamma} f(x+y)(dx+dy)$, $f(t)$ — непрерывная функция, $A(0;0)$, $B(x_0;y_0)$.

64. $\int\limits_{\Gamma} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — непрерывные функции, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$.

65. $\int\limits_{\Gamma} e^x \cos y\,dx - e^x \sin y\,dy$, $A(0;0)$, $B(x_0;y_0)$.

66. $\int\limits_{\Gamma} x\,dx + y^2\,dy - z^3\,dz$, $A(-1;0;2)$, $B(0;1;-2)$.

67. $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, $A(2;-1;0)$, $B(1;2;3)$.

68. $\int\limits_{\Gamma} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $A \in S_1$, $B \in S_2$, где S_1 — сфера x^2+y^2+ $+z^2 = R_1^2$, S_2 — сфера $x^2+y^2+z^2 = R_2^2$ $(R_1 > 0,\ R_2 > 0)$.

Найти функцию и по заданному полному дифференциалу этой функции (69–77).

69. $du = x^2\,dx + y^2\,dy$.

70. $du = (e^{2y} - 5y^3e^x)\,dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x)\,dy$.

71. $du = e^{x-y}\,[(1+x+y)\,dx + (1-x-y)\,dy]$.

72. $du = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \left(\dfrac{e^2}{1+x^2} + 1\right)dy$.

73. $du = \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z}$. **74.** $du = \dfrac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1+x^2y^2z^2}$.

75. $du = (x^2 - 2yz)\,dx + (y^2 - 2xz)\,dy + (z^2 - 2xy)\,dz$.

76. $du = \left(1 - \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{z}\right)dx + \left(\dfrac{x}{z} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}\,dz$.

77. $du = \dfrac{(x+y-z)\,dx + (x+y-z)\,dy + (x+y+z)\,dz}{x^2+y^2+z^2+2xy}$.

78. Какому условию должна удовлетворять дифференцируемая функция $F(x;y)$, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{AB}} F(x;y)(y\,dx + x\,dy)$$

не зависел от пути интегрирования Γ_{AB}?

79. Исходя из определения длины s спрямляемой кривой $\Gamma =$ $= \{\mathbf{r}(t), a \leqslant t \leqslant b\}$, данного в [1, § 24, п. 2], доказать, что если Γ — кусочно гладкая кривая, то в R^3

$$s = \int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt, \tag{31}$$

а в R^2

$$s = \int\limits_{\Gamma} ds = \int\limits_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{32}$$