Тема 1. Системи лінійних рівнянь.

1.1.Основні поняття

Загальний вигляд системи лінійних рівнянь:

$\alpha_{11}\ \mathrm{x}_1+\alpha_{12}\mathrm{x}_2+\ldots+\alpha_{1\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n}=\beta_1$

$\alpha_{21}\ \mathrm{x}_1+\alpha_{22}\mathrm{x}_2+\ldots+\alpha_{2\mathrm{n}}\mathrm{x}_\mathrm{n}=\beta_2$

. . . . (1)

$\alpha\ \ _{\mathrm{m}1}\mathrm{x}_1+\alpha_{\mathrm{m}2}\mathrm{x}_2+\ldots+\alpha_{\mathrm{mn}}\mathrm{x}_\mathrm{n}=\beta_\mathrm{m}$

З системою (1) пов'язують дві матриці: основну матрицю (матрицю коефіцієнтів)

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n}\\ ... & .. & .. & ..\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \qquad (A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c}\alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} & \beta_1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} & \beta_2\\ ... & .. & .. & .. & ...\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} & \beta_n\end{array}\right)$$

Означення 1.

Впорядкована множина n чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ називається **розв"язком** системи (1), якщо при підстановці чисел $\lambda_1, ..., \lambda_n$ в систему (1) замість $\mathrm{x}_1,\ldots,\mathrm{x}_\mathrm{n}$ відповідно одержуємо справедливі рівності.

Означення 2.

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має розв"язок.

Означення 3.

Сумісна система лінійних рівнянь називається **визначеною**, якщо має єдиний розв"язок. Сумісна система лінійних рівнянь, яка має безліч розв"язків, називається **невизначеною**.

Означення 4.

Дві системи називаються **еквівалентними**, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Приклад.

$$\left\{\begin{array}{l}1x_1+1x_2+1x_3=0\\ 1x_1+2x_2+3x_3=0\\ 4x_1+5x_2+6x_3=0\end{array}\right. \{ \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}1x_1+1x_2+1x_3=0\\ x_2+2x_3=0\\ x_2+2x_3=0\end{array}\right. \quad \{$$

Остання система еквівалентна системі з двох рівнянь $\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2+x_3=0\\ x_2+2x_3=0\end{array}\right. \{$

Виразимо x_1 та x_2 через x_3

$$\left\{\begin{array}{l}x_1+x_2=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{array}\right. \{ \quad \left\{\begin{array}{l}x_1=x_3\\ x_2=-2x_3\end{array}\right. \{$$

Якщо x_3 надамо довільного значення c, тобто положимо x_3=c, то одержимо: x_1=c, x_2=-2c. Всі можливі розв'язки даної системи ми одержимо, надаючи параметру c всіх можливих значень.

Співвідношення x_1=c, x_2=-2c, x_3=c задають **загальний розв'язок** системи. Загальний розв'язок надалі будемо подавати у векторній формі: (c, -2c, c).

Якщо надамо деякого конкретного значенняя. наприклад, c=2,73, одержимо **частковий розв"язок** даної системи: (2,73, -5,46, 2,73). #

1.2.Метод Гаусса розв'язування загальної системи лінійних рівнянь.

Визначимо **елементарні перетворення** 1-го, 2-го та 3-го роду системи лінійних рівнянь таким чином:
домножити деяке рівняння на число, відмінне від 0.
поміняти два рівняння місцями.
додати до одного рівняння інше, помножене на деяке число.

Теорема 1. Елементарні перетворення переводять систему (1) в систему, еквівалентну даній.

Доведення.

Очевидно, що перетворення 1-го та 2-го роду не змінюють множини розв'язків системи.

Доведем, що перетворення 3-го роду не змінюють множину розв'язків системи. Нехай система (2) одержана з системи (1) так: до j-го рівняння додали i-те, помножене на число μ. Всі рівняння, крім j-го не зміняться, j-те запишеться так:

$$(\alpha_{j1} + \mu\alpha_{i1})x_1 + (\alpha_{j2} + \mu\alpha_{i2})x_2 + ... + (\alpha_{jn} + \mu_{in})x_n = (\beta_j + \mu\beta_i)$$

Покажемо, що довільний розв"язок $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ системи (1) є також розв"язком системи (2). Дійсно, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ задовольняє всім рівнянням системи (2), крім j-го. Підставимо $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ в j-те рівняння:

$$(\alpha_{j1}+\mu\alpha_{i1})\lambda_1+...+(\alpha_{jn}+\mu\alpha_{in})\lambda_n = (\alpha_{j1}\lambda_1+...+\alpha_{jn}\lambda_n)+\mu(\alpha_{i1}\lambda_1+...+\alpha_{in}\lambda_n)$$

Оскільки $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ - розв"язок системи (1), то $\alpha_{j1}\lambda_1 + ... + \alpha_{jn}\lambda_n = b_j$

$$\alpha_{i1}\lambda_1 + ... + \alpha_{in}\lambda_n = b_i$$

$$(\alpha_{j1} + \mu\alpha_{i1})\lambda_1 + ... + (\alpha_{jn} + \mu\alpha_{in})\lambda_n = \beta_j + \mu\beta_i$$

Остання рівність показує, що $\lambda_1, .., \lambda_n$ також задовольняють j-те рівняння системи (2).

Покажемо, що будь-який розв/язок системи (2) задовольняє систему (1). Систему (1) одержимо з (2), віднявши від j-го рівняння і-те, помножене на μ, тобто за допомогою елементарного перетворення 3-го виду. За доведеним, будь-який розв/язок вихідної системи (2) є також розв/язком результуючої системи (1).

Отже, розв'язки систем (1) та (2) співпадають. Теорему доведено #

Теорема 2. Будь-яка система (1) за допомогою елементарних перетворень зводиться до східчастого виду.

В якості доведення теореми наведемо алгоритм Гаусса зведення системи до східчастого виду послідовним застосування елементарних перетворень.

1-ий крок. Перевіряємо, чи $\alpha_{11} = 0$? Якщо так, то ставимо на перше місце рівняння, в якому коефіцієнт при x_1 відмінний від 0. Далі вважаємо, що

$\alpha_{11} \neq 0$.iiii i-го рівняння $(i = 2, 3, ..., m)$перше рівняння, помножене на такий коефіцієнт, щоб після віднімання коефіцієнт при x_1 став рівним 0 ($m - 1$ елементарне пертворення 2-го типу)

До 2-го рівняння додаєм перше, помножене на $-\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$:

одержуємо: $\left(\alpha_{21} - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{11}\right) x_1 + \left(\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \cdot \alpha_{12}\right) x_2 + ... = b_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} b_1$.

До 3-го рівняння додаємо перше, помножене на $-\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}$ і т.д.

В результаті віднімання коефіцієнт при $_1$у 2-му, 3-му і.т.д. рівняннях дорівнює 0, тобто ми одержали систему, в якій $_1$ входить лише в перше рівняння. Коефіцієнти нової системи будемо позначати через α'.

Після першого кроку може виявитися, що друга невідома також не входить в усі рівняння з номером і>1. Нехай x_k - невідома з найменшим номером, яка входить в деяке рівняння, крім першого. Ми одержали систему

$$
\begin{aligned}
&\alpha'{}_{11}\, x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha'_{1n}\, x_n = \beta'_1 \\
&\qquad \alpha'_{2k}\, x_k + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + \alpha'{}_{2n}\, x_n = \beta'_2 \\
&\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&\qquad \alpha'_{mk}\, x_k + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + \alpha'_{mn}\, x_n = \beta'_m, \qquad k > 1, \quad a'_{11} \neq 0
\end{aligned}
$$

2-ий крок. Перше рівняння залишаємо без змін.

Вважаємо, що$\alpha'_{2k} \neq 0$. Якщо це не так, то змінюючи місцями рівняння та за допомогою заміни невідомих робимо так, щоб коефіцієнт при x_kв другому рівнянні був відмінним від нуля. Далі вважаємо, що $\alpha'_{2k} \neq 0$.

До 3-го рівняння додаємо 2-ге, помножене $-\frac{\alpha'_{3k}}{\alpha'_{2k}}$,

до 4-го рівняння додаємо 3-є, помножене $-\frac{\alpha'_{4k}}{\alpha'_{2k}}$ і т.д.

Таким чином вилучаємо невідому x_k з 3-го, 4-го, …m-го рівняння.

3-й крок - аналогічно.

Через скінчене число кроків система (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c_{11}\,x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_{1n}\,x_n &= d_1 \\ c_{2k}\,x_k + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + c_{2n}\,x_n &= d_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \\ c_{rs}\,x_s + \ldots\ldots.. + c_{rn}\,x_n &= d_r, \\ 0 &= d_{r+1} \\ \ldots \quad & \ldots \\ 0 &= d_m \end{aligned} \qquad (1)$$

Тут $c_{11},\ c_{2k},\ \cdots,\ c_{rs}$ відмінні від 0 $((1 < k < \cdots < s \leq m)$

Теорему доведено.#

Про систему виду (**??**) кажуть, що вона має **східчастий** вид.

Зауваження. Елементарні перетворення зручно виконувати не над системою лінійних рівнянь, а над її розширеною матрицею.

i,i r-го, можуть бути суперечливими (якщо хоча б одне з чисел $d_{r+1}, \ldots,\ d_m$ відмінне від 0). В цьому випадку система (**??**), а отже і система (1), розв"язку не має.

Очевидна

Теорема 3. Система (1) є сумісною ⇔після приведення до східчастого виду вона не містить рівнянь виду $0 = d_j$, де $d_j \neq 0$

Якщо $d_{r+1} = ... = d_m = 0$, то останні $m - r$ рівнянь не несуть інформації і можуть бути відкинуті.

Означення 5.

Невідомі $x_1,\ x_k,\ \cdots,\ x_s$, з яких починаються 1-е, 2-е,. . . , r-те рівняння системи, зведеної до східчастого виду (**??**), будемо називати **головними**, а інші, якщо такі є – **вільними.**

Вільним невідомим можемо надавати довільні значення. Значення головних невідомих $x_1,\ x_k,\ \cdots,\ x_s$ однозначно визначаються через вільні невідомі з системи (**??**).

Означення 6.

Вираз головних невідомих $x_1,\ x_k,\ \cdots,\ x_s$ через вільні називається **загальним розв"язком системи.** Надаючи вільним невідомим деякі конккретні значення, одержуємо **частковий розв'язок системи**.

Теорема 4. Сумісна система є визначеною ⇔ після приведення її до східчастого виду $r = n$.

Зворотній хід методу Жордана-Гауса.

Щоб одержати вираз головних невідомих $x_1,\ x_k,\ \cdots,\ x_s$ через вільні, віднімемо від попередніх останнє r-те рівняння, , помножене на такий коефіцієнт, щоб після віднімання коефіцієнт при x_sстав рівним 0. Далі, віднімемо від попередніх передостаннє $(r-1)$-е рівняння, , помножене на такий коефіцієнт, щоб після віднімання коефіцієнт при відповідному головному невідомому став рівним 0.

Через скінчене число кроків система (1) набуде вигляду

$$\begin{array}{l} c'_{11}x_1 \qquad\qquad = d'_1 - c'_{1j_1}x_{j_1} - ... - c'_{1,s+1}x_{s+1} - ... - c'_{1n}x_n \\ \qquad c'_{2k}x_k \qquad = d'_2 - c'_{2j_1}x_{j_1} - ... - c'_{2,s+1}x_{s+1} - ... - c'_{2n}x_n \\ \qquad\quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \qquad\qquad c'_{rs}x_s = d'_r, -c'_{r,s+1}x_{n+1} - ... - c'_{rn}x_n \end{array}$$

де $x_{j_1}, ..., \ x_{s+1}, \ \cdots, \ x_n$ - вільні невідомі, $c'_{11}, \ c'_{2k}, \ \cdots, \ c'_{rs}$ відмінні від 0 $((1 < k < \cdots < s \leq m)$. Розділивши кожне рівняння на відповідні коефіцієнти, одержимо:

$$\begin{array}{l} x_1 = d"_1 - c"_{1j_1}x_{j_1} - ... - c"_{1,s+1}x_{s+1} - ... - c"_{1n}x_n \\ x_k = d"_2 - c"_{2j_1}x_{j_1} - ... - c"_{2,s+1}x_{s+1} - ... - c"_{2n}x_n \\ \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_s = d"_r, -c"_{r,s+1}x_{n+1} - ... - c"_{rn}x_n \end{array} \tag{2}$$

Зауваження. Елементарні перетворення зручно виконувати не над системою лінійних рівнянь, а над її розширеною матрицею.

Приклад.

Дослідити систему лінійних рівнянь.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{array}$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-3I \\ IV-2I \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-2II \\ IV+II \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV+2III \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Відповідь: Система несумісна.

Приклад.

Знайти загальний і деякий частковий розв'язок системи

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 2 \\
6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 3 \\
9x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4
\end{aligned}
$$

Розв'язання.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & -3 & 3 \\ 9 & 6 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2I \\ III-3I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & 10 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-2I \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} I+\frac{5}{6}II \\ \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & -3\frac{1}{6} & 1\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -6 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{19}{18} & \frac{7}{18} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{19}{18}x_4 + \frac{7}{18} \\ x_3 = \frac{5}{6}x_4 + \frac{1}{6} \end{array}
$$

Загальний розв'язок системи: $(-\frac{2}{3}C_1 + \frac{19}{18}C_2 + \frac{7}{18}, \quad C_1, \quad \frac{5}{6}C_2 + \frac{1}{6}, \quad C_2)$

Частковий розв'язок системи : $(\frac{7}{18}, \quad 0, \quad \frac{1}{6}, \quad 0)$

1.3 Ранг матриці і елементарні перетворення.

Означення 7.

Кількість ненульових рядків матриці після зведення її до східчастого виду будемо називати (рядковим) **рангом матриці**

Далі нами буде доведено лему

Лема. *При елементарних перетвореннях рядків або стовпчиків ранг матриці не змінюєтьcя.*

В силу леми теорема 3 еквівалентна наступній теоремі.

Теорема (Кронекера-Капеллі)

Система лінійних рівнянь є сумісною тоді и тильки тоді, коли ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці.

Обчислення рангу матриці методом Жордана-Гаусса.

Щоб обчислити ранг, зводимо матрицю до східчастого виду за допомогою елементарних перетворень. Число r ненульових рядків, одержаних в результаті дорівнює рангу матриці: $r = rankA$.

1.4. Однорідні системи.

Означення 8.

Однорідною називається система лінійних рівнянь, всі вільні члени якої дорівнюють 0:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}x_1 + ... + \alpha_{1n}x_n = 0 \\
&............................... \\
&\alpha_{v1}x_1 + ... + \alpha_{vn}x_n = 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

Будь-яка система лінійних однорідних рівнянь має нульовий розв'язок $(0, 0, \ldots 0)$, отже вона є сумісною.

Теорема 6. Система лінійних однорідних рівнянь має ненульові розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг r матриці коефіцієнтів менше числа невідомих n.

Дійсно, в цьому випадку після зведення системи до східчастого виду, одержимо r рівнянь і, отже r головних і n-r вільних невідомих. Надаючи вільним невідомим ненульові значення, одержимо ненульові розв'язки системи

Будова множини розв'язків систем лінійних однорідних рівнянь .

Теорема 7. Якщо Z_1,..Z_n-розв'язки однорідної системи (**??**), λ_1.., λ_n- деякі числа, то $\lambda_1 Z_1 + ... + \lambda_k Z_k$- також розв'язки системи (**??**).

Довести самостійно.

Наслідок. Множина розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь утворює лінійний підпростір.

Теорема 8. Всі розв'язки системи лінійних однорідних рівнянь є лінійними комбінаціями n-r лінійно незалежних розв'язків де n - число невідомих, r=rankA.

Означення 9.

Базис простору розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь називається **фундаментальною системою розв'язків.**

Будова множини розв'язків системи лінійних неоднорідних рівнянь .

Теорема 9. Загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь дорівнює сумі часткового розв'язку даної неоднорідної і загального розв'язку відповідної однорідної системи лінійних рівнянь (тобто однорідної системи з тією ж матрицею коефіцієнтів).

Довести самостійно.

Наслідок 1. Система лінійних неоднорідних рівнянь є визначеною тоді і тільки тоді, коли відповідна однорідна система має тільки нульовий розв'язок

Наслідок 2. Множина розв'язків системи лінійних неоднорідних рівнянь утворює лінійний многовид.

Приклад.

Знайти загальний розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 = 3\\
&x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\\
&4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 13
\end{aligned}$$

і подати його у вигляді суми загального розв'язку відповідної однорідної системи та часткового розв'язку даної неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Розв'язання

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 13 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Загальний розв'язок:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 = 1 - 2x_3 \end{cases} \{ \tag{4}$$

або (2+c,1-2c,c).

Відповідна однорідна система: : $\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array}\right)$

Розв'язок однорідної: (c,-2c,c).

Частковий розв'язок неоднорідної отримаємо з (**??**), поклавши, наприклад, x_3=0, тобто частковим розв'язком є (2,1,0).

Отже, загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь дорівнює сумі часткового розв'язку даної неоднорідної і загального розв'язку відповідної однорідної системи лінійних рівнянь:

(2+c,1-2c,c)= (c,-2c,c)+ (2,1,0).

Зауваження. Метод Гаусса розвязування систем лінійних рівнянь і досі залишається одним з найкращих методів розв'язування систем лінійних рівнянь. Зручний для невеликих n, він є також вигідним для реалізації на ЕВМ, особливо в тих випадках, коли вимагаються точні розвязки. У випадках, коли коефіцієнти задано, а рішення шукаються з певною точністю, часто більш практичними виявляються інші методи, зокрема ітераційні. Часом більш зручно знаходити розв'язки системи лінійних рівнянь, не зводячи її до східчастого виду. В першу чергу це відноситься до випадку, коли матриця системи має багато нулів.

В теоретичних дослідженнях, де на перше місце виходять формулювання умов сумисності чи визначеності системи незамінніми є теорема Кронекера –Капеллі та наслідок 1 до теореми 9.

Задачі. Аудиторна робота (Зразок).

.Дослідити сумісність і знайти загальний розв'язок та один частковий розв'язок систем рівнянь:

1) $\begin{array}{l} 2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6 \\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4 \\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1-6x_2+3x_3+2x_4=4 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} 8x+6x+5x+2x=21 \\ 3x+3x+2x+\ \ x=10 \\ 4x+2x+3x+\ x=\ \ 8 \\ 3x+5x+\ \ x+\ \ x=15 \\ 7x+4x+5x+2x=18 \end{array}$

Дослідити систему та знайти загальний загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ

$$\begin{array}{c} 2x_1+5x_2+\quad x_3+3x_4=2 \\ 4x_1+6x_2+3x_3+5x_4=4 \\ 4x_1+14x_2+x_3+7x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+3x_3+\lambda x_4=7 \end{array}$$

5) Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь:

$$\begin{array}{c} 3x_1-6x_2+\ 4x_3+\ 2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3-11x_4=0 \\ 2x_1-4x_2+\ 5x_3+\ 3x_4=0 \end{array}$$

6) При яких умовах в загальному розв'язку системи рівнянь

$\begin{array}{r} y+az+bt=0 \\ -x+cz+dt=0 \\ ax+cy-et=0 \\ bx+dy+ez=0 \end{array}$ iiii z та t?

7) Розв'язати систему за методом Крамера:

$$\begin{array}{c} 2x_1+2x_2-\ x_3+\quad x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-\quad x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3\ +\ 2x_4=6 \end{array}$$

8) Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

Задачі. Самостійна робота.

.Дослідити сумісність і знайти загальний розв'язок та один частковий розв'язок систем рівнянь:

1) $$\begin{aligned} 6x_1+3x_2+2x_3+3x_4+4x_5&=5\\ 4x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5&=4\\ 4x_1+2x_2+3x_3+2x_4+x_5&=0\\ 2x_1+x_2+7x_3+3x_4+2x_5&=1 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4&=4\\ 4x_1+3x_2+x_3+x_4&=5\\ 5x_1+11x_2+3x_3+2x_4&=2\\ 2x_1+5x_2+x_3+x_4&=1\\ x_1-7x_2-x_3+2x_4&=7 \end{aligned}$$

3) Дослідити систему та знайти загальний загальний розв'язок в залежності від значення параметра λ

$$\begin{aligned} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4&=1\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4&=1\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4&=1\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4&=1 \end{aligned}$$

4) Знайти загальний розв'язок та фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь:

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5&=0\\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5&=0\\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5&=0\\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5&=0 \end{aligned}$$

5) Розв'язати систему за методом Крамера:

$$2x_1+3x_2+11\,x_3+5x_4=2$$
$$\begin{aligned} x_1+x_2+5x_3+2x_4&=1\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4&=-3 \end{aligned} \qquad x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3$$

6) Обчислити ранг матриці за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38\\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80\\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118\\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$$

Додаткові завдання.

1. Оцінити кількість дій, необхідних для зведення методом Гаусса до східчастого виду матриці розмірності 100X100.

2. Реалізувати метод Гауса розв'язування системи лінійних рівнянь на ЕВМ .

Вимога: програма має бути придатна для довільних матриць, в тому числі і з великою кількістю нулів!.

Література :

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. - М.: Наука, 1977,- 496 с.
2. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. - М.: Наука, 1984,- 416 с.
3. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. - М.: Наука, 1977.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. . - М.: Наука, 1971.