1 Лекція 1.

1.1 Формальні мови.

Формальна мова складається з таких елементів:

1. Алфавіт $\mathcal{A}$ - довільна скінченна або зліченна множина, яка розбивається на дві підмножини
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_o \cup \mathcal{A}_s,$$
де елементи множини $\mathcal{A}_0$ називають термінальними (основними) символами, а елементи множини A_s службовими символами.

2. У множині $\mathcal{A}^*$ всіх слів в алфавіті $\mathcal{A}$, яка є зліченною (чому ?), виділяється підмножина
$$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{A}^*,$$
яка називається підмножиною слів (речень, формул) формальної мови.

Означення 1.1. *Сукупність правил, які визначають $\mathcal{W}$, називають* **синтаксисом** *формальної мови.*

Зв'язок між формальною і змістовною мовами здійснюється за допомогою інтерпретації речень формальної мови на деякій множині $\mathcal{T}$, зміст елементів якої ми приймаємо. Для двозначної логіки використовують $\mathcal{T}_0 = \{true, false\} = \{\text{істина}, \text{хиба}\} = \{0, 1\}$. В численні предикатів в якості $\mathcal{T}$ можна розглядати і множину предикатів. Нагадаємо, що предикатами називаються функції, що приймають значення в $\mathcal{T}_0$:
$$D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \to \mathcal{T}_0.$$
При цьому обчислення значення предиката в конкретній обраній точці слід розглядати як інтерпретацію формули на множині $\mathcal{T}_0$.

Означення 1.2. *Інтерпретатором формальної мови на множині $\mathcal{T}$ називають функцію*
$$I\ : \mathcal{W} \to \mathcal{T},$$
а сукупність правил, які її визначають, називають **семантикою** *формальної мови.*

1.2 Числення висловлювань як формальна мова.

Синтаксис числення висловлювань.

Алфавіт термінальних символів складається з маленьких латинських літер: $\mathcal{A}_0 = \{a, b, c, \ldots\}$ і спкціальних символів $\mathcal{A}_s = \{,\ ,(,), \wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow\}$

Синтаксис числення висловлювань буде визначено індуктивно:

1^0. База: $a, b, c, \ldots \in \mathcal{W}$ (тобто вони є реченнями мови, які називають простими висловлюваннями)

2^0. Індуктивний крок: Якщо $X, Y \in \mathcal{W}$, тобто є реченнями числення висловлювань, то $(X) \vee (Y), (X) \wedge (Y), \neg(X), \neg(Y), (X) \to (Y), (X) \leftrightarrow (Y) \in \mathcal{W}$, тобто також є реченнями.

Формулами числення висловлювань є ті і тільки ті слова з $\mathcal{A}^*$, які отримані з 1^0 за допомогою скінченної кількості кроків 2^0. Використані тут великі латинські літери X та Y не належать алфавіту $\mathcal{A}$. Це є **метасимволи**, які потрібні для опису властивостей мови. Зокрема, в численні висловлювань вони будуть використовуватися для позначення формул (речень) цієї формальної мови.

З означення формули числення висловлювання, випливає що вона має таку структуру або

$$F = (X) * (Y), \quad \text{де} \;\; * = \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$$

або

$$F = \neg(X),$$

де X, Y називають підформулами формули F, а зв'язки $*, \neg$ відповідно **головними зв'язками** формули.

Семантика числення висловлювань

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 = \{0, 1\}$– семантична область, а інтерпретатор I будується в два кроки

1^0 спочатку будується відображення $I : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{T}$, яке приписує простим висловлюванням значення істинності - 1 або 0 ;

2^0 Якщо формула F має структуру $F = (X) * (Y)$ або $F = \neg X$, то спочатку обчислюється значення інтерпретатора на підформулах -$I(X), I(Y)$, а потім, користуючись таблицями інтерпретації логічних зв'язок отримуємо значення $I(F)$.

Нагадаємо ці таблиці.

$I(X)$	$\neg I(X)$
1	0
0	1

$I(X)$	$I(Y)$	$I(X \wedge Y)$	$I(X \vee Y)$	$I(X \to Y)$	$I(X \leftrightarrow Y)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Означення 1.3. *Інтерпретація I називається* **моделлю** *формули F, якщо $I(F) = 1$,*

Інтерпретація I називається моделлю множини формул Γ, якщо вона є моделлю для кожної формули з цієї множини.

Формула називається **тотожно-істинною**, *якщо всі її інтерпретації є моделями.*

Формула називається **виконливою**, *якщо вона не є тотожно-істинною і для неї існує принаймні одна модель.*

Формула називається **тотожно-хибною**, *якщо у неї немає жодної моделі.*

Теорема 1.1. *Якщо в тотожно-істинній (тотожно-хибній) формулі* $F = F(a, b, \dots,)$ *замінити всі прості висловлювання на довільні формули числення висловлювань* $a \to X_a, b \to X_b, \dots$, *то отримана формула* $\widetilde{F} = F(X_a, X_b, \dots,)$ *буде також тотожно-істинною (тотожно-хибною).*

Означення 1.4. *Формула* F *називається* **логічним наслідком** *формул* $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, *якщо для довільної інтерпретації* I *простих висловлювань, що входять в цю формулу з рівностей*

$$I(H_1) = I(H_2) = \dots = I(H_n) = 1 \quad \textit{випливає, що} \quad I(F) = 1.$$

Це буде записуватися наступним чином

$$H_1, H_2, \dots, H_n \models F.$$

Запис $\models F$ означає, що F є тавтологією.

Основні типи логічних наслідків.

1. Правила **modus ponens :**

$$A, A \to B \models B,$$

2. **modus tallens :**

$$A \to B, \neg B \models \neg A$$

3. **Правило силогізму:**

$$A \to B, B \to C \models A \to C$$

4. **Метод (правило) резолюцій:**

$$X \to F, \neg X \to G \models F \vee G$$

або

$$X \vee F, \neg X \vee G \models F \vee G$$

5. **Правила введення диз'юнкції і кон'юнкції:**

$$A \models A \vee B \quad B \models A \vee B \quad A, B \models A \wedge B$$

6. **Правила вилучення диз'юнкції і кон'юнкції:**

$$A \wedge B \models A, \quad A \wedge B \models B, \quad A \vee B, \neg A \models B, \quad A \vee B, \neg B \models A$$

7. **Правила зняття подвійного заперечення і його введення:**

$$\neg(\neg A) \models A, \quad A \models \neg(\neg A).$$

Теорема 1.2. *Наступні твердження еквівалентні*

1. $H_1, H_2, \ldots, H_n \models F$;

2. $\models (H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots H_k) \to F$, *тобто коли ця формула є тавтологією;*

3. *Формула* $H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots H_k \wedge \neg F$ *є тотожно хибною;*

4. *Формула* $\neg H_1 \vee \neg H_2 \ldots \neg H_n \vee F$ *є тотожно-істинною.*

Означення 1.5. *Дві формули* X, Y *називаються* **еквівалентними**, *якщо для будь-якої інтерпретації* I *має місце* $I(X) = I(Y)$. *Еквівалентність формул буде записуватися таким чином* $X \simeq Y$

Зручно ввести в розгляд нульарні зв'язки - логічні константи - $\mathbf{0}, \mathbf{1}$, які за означенням завжди інтерпретуються як 0 та 1 відповідно. Тоді для формул F, що є тавтологіями (тотожно-хибними формулами) будемо мати $F \simeq 1 \quad (F \simeq 0)$.

Теорема 1.3. *Наступні твердження еквівалентні.*

А). $X \simeq Y$;

Б). таблиці істинності формул X, Y *збігаються;*

В). формула $X \leftrightarrow Y$ *є тавтологією.*

Наступні еквівалентності перевіряються безпосередньо за допомогою таблиць істинності:

1) ідемпотентність:

$$(X \wedge X) \simeq X \simeq (X \vee X);$$

2) комутативність:

$$(X \wedge Y) \simeq (Y \wedge X);$$
$$(X \vee Y) \simeq (Y \vee X);$$

3. асоціативність:

$$((X \wedge Y) \wedge Z) \simeq (X \wedge (Y \wedge Z));$$
$$((X \vee Y) \vee Z) \simeq (X \vee (Y \vee Z));$$

4. дистрибутивність:

$$((X \wedge Y) \vee Z) \simeq ((X \vee Z) \wedge (Y \vee Z));$$
$$((X \vee Y) \wedge Z) \simeq ((X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z));$$

5. доповнювальність:

$$(X \vee \neg X) \simeq 1, \quad (X \wedge \neg X) \simeq 0, \quad \neg(\neg X) \simeq X;$$

6. виключення імплікації та еквівалентності:

$$X \leftrightarrow Y \simeq (X \to Y) \land (Y \to X);$$

$$(X \to Y) \simeq (\neg X \lor Y);$$

7. закони де Моргана:

$$\neg(X \land Y) \simeq (\neg X \lor \neg Y);$$

$$\neg(X \lor Y) \simeq (\neg X \land \neg Y).$$

З наведених законів випливає

Принцип двоїстості числення висловлювань.

Якщо дві формули F і G є еквівалентними ($F \approx G$) і залежать лише від символів $\neg, \lor, \land$, то, заміна зв'язок $\lor$ на $\land$ і $\land$ на $\lor$, в обох формулах приводить до еквівалентних формул- $\widetilde{F} \approx \widetilde{G}$

1.3 Числення предикатів як формальна мова.

Означення 1.6. Висловлювальна форма - *це твердження, в якому пропущені певні слова; після заповнення порожніх місць назвами елементів з певної множини D висловлювальна форма стає висловлюванням.*

Означення 1.7. *Кількість змінних від яких залежить висловлювальна форма називається її* **арністю** .

Природно вважати звичайні висловлювання (формули числення висловлювань) висловлювальними формами арності 0.

Означення 1.8. *Визначити дію інтерпретатора I_c на висловлювальній формі $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означає описати інтерпретацію всіх висловлювань, які вона задає. Тобто слід співставити кожному набору $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i \in D$, елемент $I(A)(d_1, d_2, \ldots, d_n) \in \{0, 1\}$. Отже, результатом дії інтерпретатора I_c на висловлювальну форму A є* **предикат** $I_c(A)$ **-** *функція яка приймає значення в області істинності $\{0, 1\}$. $I_c(A)$*

Означення 1.9. *Функція, яка ставить у відповідність кожному набору $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $d_i \in D$, елемент з множини $\{0, 1\}$ називається $n-$ місним ($n-$ арним)* **предикатом** *визначеним на множині D.*

Найпростішою формою визначення предикату $I(F)(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ є табличний

$I(x_1)$	$I(x_2)$	$I(x_3)$	$\ldots$	$I(x_n)$	$I(F)(I(x_1), \ldots, I(x_n))$
d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\ldots$	d_{1n}	$*$
d_{21}	d_{22}	d_{23}	$\ldots$	d_{2n}	$*$
d_{31}	d_{32}	d_{23}	$\ldots$	d_{3n}	$*$
...	...	...	...	$\ldots$	$*$
d_{k1}	d_{k2}	d_{k3}	$\ldots$	d_{kn}	$*$

. (1.1)

Тут $(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3} \dots d_{in})$ пробігає всі можливі набори $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_i \in D, k = |D|^n, * = 0, 1$.

Таким чином, щоб проінтерпретувати висловлювальну форму $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ як предикат треба обрати область інтерпретації - множину D і співставити цій формі предикат $I_c(A)$ відповідної арності, визначений на цій множині.

Операції над висловлювальними формами (предикатами).

Легко бачити, що всі введені раніше операції над висловлюваннями природним чином переносяться на висловлювальні форми. Враховуючи попереднє означення, зрозуміло що значить проінтерпретувати формули виду $A(x, y, z, \dots) * B(x, y, u, v, \dots)$, де $*-$ одна з бінарних зв'язок числення висловлювань або формулу $\neg A(x, y, z, \dots)$.

Крім цих операцій вводяться операції **квантування** .

Означення 1.10. *Якщо $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$- висловлювальна форма арності n, то за означенням, висловлювальна форма $F(x_2, x_3, \dots, x_n) = \forall x_1 A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ арності $n-1$ має інтерпретуватися наступним чином:*

1. *надати вільним змінним $x_2, x_3, \dots, x_n$ формули F значень з множини D;*
2. *для обраних значень $x_2 := d_2, x_3 := d_3, \dots, x_n := d_n$ проінтерпретувати всі висловлювання з множини $\{A(d, d_2, d_3, \dots, d_n) | d \in D\}$;*
3. *якщо принаймні для одного значення $d \in D$ результатом інтерпретації висловлювання $A(d, d_2, d_3, \dots, d_n)$ є 0, то висловлювання $F(d_2, d_3, \dots, d_n)$ інтерпретується як 0, якщо ж для всіх значень $d \in D$, результатом інтерпретації висловлювання $A(d, d_2, d_3, \dots, d_n)$ є 1, то висловлювання $F(d_2, d_3, \dots, d_n)$ інтерпретується як 1.*

Означення 1.11. *Якщо $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$- висловлювальна форма арності n, то за означенням, висловлювальна форма $F(x_2, x_3, \dots, x_n) = \exists x_1 A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ арності $n-1$ має інтерпретуватися наступним чином:*

1. *виконати пункти 1 та 2 з попереднього означення;*
2. *якщо принаймні для одного значення $d \in D$ результатом інтерпретації висловлювання $A(d, d_2, d_3, \dots, d_n)$ є 1, то висловлювання $F(d_2, d_3, \dots, d_n)$ інтерпретується як 1, якщо ж для всіх значень $d \in D$, результатом інтерпретації висловлювання $A(d, d_2, d_3, \dots, d_n)$ є 0, то висловлювання $F(d_2, d_3, \dots, d_n)$ інтерпретується як 0.*

Зрозуміло що треба змінити в означеннях, щоб проінтерпретувати формули $\forall x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n), \exists x_i A(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 2, 3, \dots, n$.

Синтаксис числення предикатів.

Формальна мова має алфавіт A, який включає в себе множину термінальних символів A_0, яка складається з елементів:

f, g, h ... - функціональні константи

A, B, C ... - предикатні константи

a, b, c ... - для предикатних констант арності 0 (простих висловлювань) вживаємо малі літери

x, y, z, ... - Var - змінні

та множини спеціальних символів:

$$A_s = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, (,), \forall, \exists\}$$

Означення 1.12. *Введемо поняття* **терму** *або* **функціональної форми** *індуктивно:*

База: *a, b, c, x, y, z - найпростіші терми;*

Індукційний крок: *якщо t_1, t_2, t_k - терми, а f - функціональна константа, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ - теж терм.*

Поняття формули числення предикатів вводиться також індуктивно.

Означення 1.13. *Нехай $t_1, t_2, \ldots$- довільні терми, A - деяка предикатна константа. Тоді формула $A(t_1, t_2, \ldots)$ називається* **атомарною**.

Тепер можна дати означення формули числення предикатів.

Означення 1.14. *База: Атомарні формули - формули числення предикатів.*

індукційний крок: $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ - формули числення предикатів, тоді:

$(\mathcal{F}_1) \vee (\mathcal{F}_2), (\mathcal{F}_1) \wedge (\mathcal{F}_2), (\mathcal{F}_1) \rightarrow (\mathcal{F}_2), \neg(\mathcal{F}_1), \neg(\mathcal{F}_2), \forall x(\mathcal{F}_1), \exists y(\mathcal{F}_2)$ *- теж формули.*

Формулами числення предикатів є ті і тільки ті формули, які отримані застосуванням вищенаведених кроків у скінченній кількості.

Отже, атомарні формули є тими цеглинками з яких будуються формули числення предикатів, які мають таку форму:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(A, B, C, \ldots | x, y, z, \ldots, f_1, f_2, \ldots), \tag{1.2}$$

тут з функціональних констант, що стоять після вертикальної риски, мають бути утворені терми, які підставляються в атомарні формули, що стоять ліворуч.

Приклад 1.1. *A - предикатна константа, f - функціональна константа, x, y, z - змінні. Побудуємо формулу числення предикатів. x, y, z - найпростіші терми, f(x, y) та f(x, f(x,y)) - терми. $\forall y A(x, f(x, y))$ - формула, що є правильно побудованою за синтаксисом числення предикатів.*

Введемо, ще деякі поняття.

1. Якщо у деякій формулі числення предикатів маємо підформулу виду $\forall x(\mathcal{F})$ або $\exists x(\mathcal{F})$, то підформула $\mathcal{F}$ назмвається **областю дії** відповідного квантора.

2. Змінна, яка присутня в формулі і не попадає під дію жодного квантора, називається **вільною змінною** цієї формули.

   $\forall x(A(x) \to B(x,y))$ - тут y - вільна змінна.

   $(\forall x A(x)) \to B(x,y)$ - тут кількість вільних змінних 2.

3. Кількість вільних змінних формули будемо називати її **арністю**.

4. Формула називається замкненою, якщо вона не має вільних змінних.

   $\forall x(\forall y((\forall z(A(z)) \to B(x,y))))$

5. Введемо такий порядок (пріоритет) логічних зв'язок:

$$\leftrightarrow \;\prec\; \to \;\prec\; \exists \;\preceq\; \forall \;\prec\; \vee \;\prec\; \wedge \;\prec\; \neg$$

Семантика числення предикатів.

Означення 1.15. *Інтерпретатором формули числення предикатів називається трійка* (D, I_c, I_v)*, яка складається з множини* D *- області інтерпретації, та двох інтерпретаторів (відображень)* I_c- *інтерпретатор констант,* I_v- *інтерпретатор змінних. Областю значень відображення* I_c *є множина* $\mathcal{T}$ *предикатів, а областю значень композиції* $I = I_v(I_c)$ *є область істинності* $\mathcal{T}_0 = \{true, false\} = \{істина, хиба\} = \{0, 1\}$*. Для даного набору формул, які підлягають інтерпретації, відображення* I_c *та* I_v *однозначно визначені, якщо*

1. *кожному простому висловлюванню (константі) з даного набору формул співставлено її значення істинності або 1, або 0.*

$$a \mapsto I_c(a) \in \{0, 1\};$$

2. *кожній функцірнальній константі* f *з даного набору формул співставлено функцію від певної кількості змінних, яка визначена на множині* D *і набуває значень в цій же множині:*

$$f \mapsto I_c(f) : D \times D \times \ldots ... \times D \to D$$

3. *кожній предикатній константі* A *з даного набору формул співствлено предикат певної арності:*

$$A \mapsto I_c(A) : D \times D \times \ldots ... \times D \to \{0, 1\}$$

4. *інтерпретатор змінних присвоює кожній вільній змінній формули певне значення з області* D :

$$I_v(x) : x \mapsto d_x \in D$$

Означення 1.16. *Інтерпретація формули* $\mathcal{F}$ *здійснюється за такою схемою:*

1 Обирається множина $D-$ *область інтерпретатора;*

2) Визначаються інтерпретації всіх атомарних формулам, що входять у формулу, шляхом співставлення їм предикатів, визначених на множині D *;*

3) Визначаються інтерпретації всіх функціональних констант, що входять у формулу, шляхом співставлення їм функцій: $D \times D \times \ldots \times D \mapsto D$.

4) Користуючись правилами інтерпретації логічних зв'язок проводиться інтерпретація формули $\mathcal{F}$*, як предикату* $I_c(\mathcal{F})$*, шляхом складання таблиці виду*

$I(x_1)$	$I(x_2)$	$I(x_3)$	$\ldots$	$I(x_n)$	$I(\mathcal{F})(I(x_1), \ldots, I(x_n))$
d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\ldots$	d_{1n}	$*$
d_{21}	d_{22}	d_{23}	$\ldots$	d_{2n}	$*$
d_{31}	d_{32}	d_{23}	$\ldots$	d_{3n}	$*$
...	...	...	...	$\ldots$	$*$
d_{k1}	d_{k2}	d_{k3}	$\ldots$	d_{kn}	$*$

. (1.3)

Тут $(d_{i1}, d_{i2}, d_{i3} \dots d_{in})$ пробігає всі можливі набори $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $d_i \in D, k = |D|^n, * = 0, 1$.

5) *Вільним змінним формули $\mathcal{F}$ надаються певні значення з області D, тобто визначається дія інтерпретатора $I_v: \quad I_v(x_i) = d_i \in D$,після чого за вищенаведеною таблицею визначається значення $I(F) \in \{0, 1\}$.*

Приклад 1.2. *Побудуємо яку-небудь інтерпретацію формули $\forall y A(x, f(x, y))$ з попереднього прикладу.*

1. *Оберемо трьох-елементну область $D = \{a, b, c\}$*
2. *Визначимо бінарний предикат на цій множині:*

$\frac{y}{x}$	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	1
c	0	1	0

3. *Співставимо функціональній константі f функцію $I_c(f) : D \times D \to D$, яку ми задамо таблицею:*

$\frac{y}{x}$	a	b	c
a	b	c	c
b	a	a	b
c	b	b	b

4. *Складемо таблицю предиката $I_c(\forall y A(x, f(x, y)))$*
5. *Покладемо $I_v(x) = b$ і знайдемо відповідне значення істинності.*

Означення 1.17. *Інтерпретатація (D, I_c, I_v) формули $\mathcal{F}$ називається* **моделлю** *формули $\mathcal{F}$, якщо $I(\mathcal{F}) = 1$.*

Нехай маємо множину формул для яких (D, I_c, I_v) є спільною моделлю, тоді будемо говорити, що (D, I_c, I_v) є **моделлю множини формул**.

Означення 1.18. *Означення тотожно-істинної, виконливої, тотожно-хибної, еквівалентних формул, а також логічного наслідку, дані раніше для числення висловлювань, дослівно переносяться на числення предикатів.*

Зауважимо тільки, що при цьому довільність інтерпретації означає довільний вибір множини D (п. 1), довільність в обранні предикатів для інтерпретації атомарних формул (п. 2), вибір довільних функцій на множині D для інтерпретацій функціональних констант (п.3) і нарешті виборі довільних значень для присвоєння вільним змінним п. 5.

Теорема 1.4. *Дві формули F_1, F_2 числення предикатів еквівалентні тоді і тільки тоді коли формула $F_1 \leftrightarrow F_2$ є тотожно-істинні.*

Приклади еквівалентностей числення предикатів.

$$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \simeq \forall x (A(x) \wedge B(x)),$$

$$\neg \forall x A(x) \simeq \exists x \neg A(x),$$
$$\neg \exists x A(x) \simeq \forall x \neg A(x),$$

Чи є правильними наступні еквівалентністі?

$$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \overset{?}{\simeq} \forall x (A(x) \vee B(x)),$$
$$\forall x \forall y A(x,y) \overset{?}{\simeq} \forall y \forall x A(x,y),$$
$$\exists x \exists y A(x,y) \overset{?}{\simeq} \exists y \exists x A(x,y),$$
$$\exists x \forall y A(x,y) \overset{?}{\simeq} \forall y \exists x A(x,y).$$

Якщо формула $\mathcal{G}$ не залежить від змінної x, то мають місце наступні еквівалентності:

$$(\forall x \mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \vee \mathcal{G}(y,z,\ldots,)) \simeq \forall x \left(\mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \vee \mathcal{G}(y,z,\ldots,) \right), \tag{1.4}$$
$$(\exists x \mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \vee \mathcal{G}(y,z,\ldots,)) \simeq \exists x \left(\mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \vee \mathcal{G}(y,z,\ldots,) \right), \tag{1.5}$$
$$(\forall x \mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \wedge \mathcal{G}(y,z,\ldots,)) \simeq \forall x \left(\mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \wedge \mathcal{G}(y,z,\ldots,) \right), \tag{1.6}$$
$$(\exists x \mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \wedge \mathcal{G}(y,z,\ldots,)) \simeq \exists x \left(\mathcal{F}(x,y,z,\ldots,) \wedge \mathcal{G}(y,z,\ldots,) \right). \tag{1.7}$$

Крім того, для довільної формули $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x,y,\ldots)$ мають місце еквівалентності:

$$\neg \forall x \mathcal{F}(x,y,\ldots) \simeq \exists x \neg \mathcal{F}(x,y,\ldots) \tag{1.8}$$
$$\neg \exists x \mathcal{F}(x,y,\ldots) \simeq \forall x \neg \mathcal{F}(x,y,\ldots) \tag{1.9}$$

Доведіть їх самостійно.

Приклад 1.3. *З'ясуємо до якого класу відноситься формула*

$$\forall x (A(x,y) \to B(x,y)) \to (A(x,y) \to \forall x B(x,y))$$

Нехай I така інтерпретація на множині $D = \{a, b\}$, що $I_c(A) = I_c(B)$:

$\frac{y}{x}$	a	b
a	1	1
b	0	0

і покладемо $I_v(x) = I_v(y) = a$. Тоді, очевидно $I(A(x,y) \to \forall x B(x,y)) = 0$ і значення I на всій формулі дорівнює 0. Враховуючи, що формула має очевидну модель на множині з одного елемента, приходимо, що розглянута формула є виконливою.

Насправді, якщо накласти умову, що формула A не залежить від x, тобто $A(x, y) = A(y)$, то формула

$$\mathcal{F} = \forall x(A(y) \to B(x, y)) \to (A(y) \to \forall x B(x, y))$$

буде тотожно-істинною. Дійсно, якщо для деякої інтерпретації I має місце $I(A(y) \to \forall x B(x, y)) = 0$, то $I(A(y)) = 1,\ I(\forall x B(x, y)) = 0$. Останнє означає, що існує $d^* \in D$: $I(B(d^*, I_v(y))) = 0$, але тоді $I(A(y) \to B(d^*, y)) = 0$, звідки $I(\forall x(A(y) \to B(x, y))) = 0$ і $I(\mathcal{F}) = 0$.

Приклад 1.4. *З'ясуємо до якого класу відноситься формула*

$$\mathcal{F} = \forall x(\neg \forall y A(x, y)) \to \neg \forall y A(y, y) \quad ?$$

На множині з двох елементів визначимо інтерпретацію $I_c(A)$ таким чином:

$\frac{y}{x}$	a	b
a	1	0
b	0	1

Легко переконатися, що $I(\mathcal{F}) = 0$. Формула $\mathcal{F}$ має таку структуру

$$\forall x \mathcal{G}(x) \to \mathcal{G}(t),$$

де $t-$ деякий терм (в розглянутому випадку $t = y$). Виявляється, що якщо накласти на терм t певні умови, то вказана формула стане тотожно-істинною.

Означення 1.19. *Терм t називається вільним для змінної x у формулі $\mathcal{G}(x)$, якщо жодна змінна терма t не підпадає під дію кванторів формули $\mathcal{G}(x)$.*

Наприклад, якщо $t = x$, то цей терм є вільним для змінної x, оскільки t містить єдину змінну x, а вона є вільною змінною у формулі $\mathcal{G}(x)$, тобто не підпадає під дію жодного квантора формули $\mathcal{G}(x)$. З іншого боку, терм $t = y$ не є вільним для змінної x у формулі $\forall y \mathcal{H}(x, y)$, зокрема якщо повернутись до формули $\mathcal{F}$, то терм $t = y$ не є вільним для змінної x у формулі $\neg \forall y A(x, y)$.

Лема 1.1. *Якщо терм t є вільним для змінної x у формулі $\mathcal{G}(x)$, то формула*

$$\forall x \mathcal{G}(x) \to \mathcal{G}(t),$$

є тотожно-істинною, зокрема такою є формула $\forall x \mathcal{G}(x) \to \mathcal{G}(x)$.

Доведення. Якщо для деякої інтерпретації I має місце $I(\mathcal{G}(t)) = 0$, то це означає, що для певних значень змінних $u, v, w, \ldots$ терму t маємо $I_c(\mathcal{G})(I_c(t)(I_v(u_1), I_v(u_2), \ldots))) = 0$. Покладемо $x = d = I_c(t)(I_v(u_1), I_v(u_2), \ldots)$у формулі $\mathcal{G}(x)$. Це можна зробити, бо за умовою леми змінні $u_1, u_2, \ldots$ є вільними у формулі $\mathcal{G}(x)$. Тоді $I(\mathcal{G}(d)) = 0$, а отже $I(\forall x \mathcal{G}(x)) = 0$. Цим лема доведена. $\square$

1.4 Пренексна нормальна форма.

Як ми бачили в численні висловлювань, одним із засобів з'ясування до якого класу відноситься деяка формула і побудови її моделей є зведення цієї формули до форми певного виду, наприклад ДНФ і КНФ. Такі форми є і в численні предикатів, пренексна нормальна форма є одною з них.

Означення 1.20. *Формула $\mathcal{H}$ числення предикатів, яка має вигляд*

$$\mathcal{H} = Q_1x_1\ Q_2x_2 \dots Q_kx_k\ \mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots), \tag{1.10}$$

де $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, а формула $\mathcal{G}$ не містить кванторів, називається **пренексною нормальною формою**. *При цьому, формулу $\mathcal{G}(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ називають* **тілом** *пренексної нормальної форми.*

Досить часто тіло пренексної нормальної форми подають у вигляді КНФ або ДНФ, в яких роль простих висловлювань відіграють атомарні формули.

Теорема 1.5. *Будь-яка формула числення предикатів еквівалентна деякій пренексній нормальній формі.*

Доведення. В якості доведення ми пред'явимо алгоритм, який дозволяє для довільної формули $\mathcal{F}$ числення предикатів побудувати еквівалентну їй пренексну нормальну форму.

1. Використовуючи еквівалентності 6 числення висловлювань, замінити формулу $\mathcal{F}$ на еквівалентну їй формулу $\mathcal{F}_1$, яка не містить зв'язок $\leftrightarrow$ та $\to$;

2. Користуючись еквівалентностями (1.8), (1.9) та законами де Моргано замінити формулу $\mathcal{F}_1$ на еквівалентну їй формулу $\mathcal{F}_2$, в якій знак заперечення може стояти лише перед атомарною формулою;

3. Послідовним переіменуванням змінних та використанням еквівалентностей (1.4),(1.5),(1.6),(1.7) побудувати формулу виду (1.10), яка еквівалентна $\mathcal{F}_2$;

4. Привести тіло отриманої пренексної нормальної форми до КНФ або ДНФ і спростити його.

□

Приклад 1.5. *Побудуємо пренексну нормальну форму для формули*

$$(\neg\forall x \exists y A(x, y) \wedge \forall z C(z, y)) \to A(x, x).$$

1-й крок.

$$(\neg\forall x \exists y A(x, y) \wedge \forall z C(z, y)) \to A(x, x) \simeq \neg\,(\neg\forall x \exists y A(x, y) \wedge \forall z C(z, y)) \vee A(x, x).$$

2-й крок.

$$\begin{aligned}
\neg\left(\neg\forall x\exists y A(x,y)\wedge\forall z C(z,y)\right)\vee A(x,x)\simeq \\
\simeq(\forall x\exists y A(x,y)\vee\neg\forall z C(z,y))\vee A(x,x)\simeq \\
\simeq(\forall x\exists y A(x,y)\vee\exists z\neg C(z,y))\vee A(x,x).
\end{aligned}$$

3-й крок.

$$\begin{aligned}
(\forall x\exists y A(x,y)\vee\exists z\neg C(z,y))\vee A(x,x)\simeq \\
\simeq(\exists z(\forall x\exists y A(x,y)\vee\neg C(z,y)))\vee A(x,x)\simeq \\
\simeq\exists z\left((\forall x\exists y A(x,y)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right),
\end{aligned}$$

Тут виконано дві дії: оскільки підформули $\forall x\exists y A(x,y)$ та $A(x,x)$ квантор $\exists z$ було винесено спочатку з перших дужок, а потім він був винесений перед формулою. Оскільки підформула $\neg C(z,y)$ не залежить від змінної x, то отримуємо

$$\exists z\left((\forall x\exists y A(x,y)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq\exists z\left(\forall x(\exists y A(x,y)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right).$$

Але формула $\neg C(z,y)$ залежить від змінної y, тому перед винесенням квантора слід виконати перейменування змінних:

$$\begin{aligned}
\exists z\left(\forall x(\exists y A(x,y)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq \\
\simeq\exists z\left(\forall x(\exists u A(x,u)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq \\
\simeq\exists z\left(\forall x\exists u(A(x,u)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right).
\end{aligned}$$

Оскільки підформула $A(x,x)$ залежить від x, то слід знову перейменувати змінні.

$$\begin{aligned}
\exists z\left(\forall x\exists u(A(x,u)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq \\
\simeq\exists z\left(\forall v\exists u(A(v,u)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq \\
\simeq\exists z\forall v\left(\exists u(A(v,u)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq \\
\simeq\exists z\forall v\exists u\left((A(v,u)\vee\neg C(z,y))\vee A(x,x)\right)\simeq \\
\simeq\exists z\forall v\exists u\left(A(v,u)\vee\neg C(z,y)\vee A(x,x)\right).
\end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали нормальну форму тілом якої є елементарна диз'юнкція $A(v,u)\vee\neg C(z,y)\vee A(x,x)$. Побудуйте модель цієї формули.

Лекція 2

2 Формальні теорії.

Означення 2.1. *Формальною теорією називається формальна мова* $(\mathcal{A}, \mathcal{W})$, *в якій виділена певна підсукупність (підмножина) слів* $Axioms \subset \mathcal{W}$, *елементи якої називаються аксіомами, і сформульовані правила виводу одних формул або слів з інших. При цьому запис*

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_k \vdash \mathcal{F} \tag{2.1}$$

означає: формула $\mathcal{F}$ *отримана з* $\mathcal{F}_i$ *шляхом застосування правил виводу формальної теорії.*

Означення 2.2. *Якщо формули* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_k \in Axioms$, *(є аксіомами), то формула* $\mathcal{F}$ *називається* **теоремою.** *формальної теорії. В цьому випадку замість запису* (2.1) *буде вживатися запис*

$$\vdash \mathcal{F}.$$

Означення 2.3. *Послідовність формул* $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_s$ *називається формальним виводом формули* $\mathcal{F}$ *з множини формул* $\Gamma = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_k\}$ *якщо*

i) кожна формула U_i *є або*

1^0 *аксіомою, тобто* $U_i \in Axioms$ *або*

2^0 $U_i \in \Gamma$ *або*

3^0 U_i *отримана з сукупності формул* $Axioms \cup \mathit{\Gamma} \cup \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{i-1}\}$ *за допомогою правил виводу формальної теорії.*

ii) $\mathcal{U}_s = \mathcal{F}$.

Якщо $\mathcal{F}$ *є теоремою теорії, то відповідний вивід будемо називати* **доведенням** *теореми.*

Для формальних мов, що інтерпретуються на множині $\{true, false\} = \{1, 0\}$, для кожної формули $\mathcal{F}$ визначена формула $\neg\mathcal{F}$ така, що для будь-якої інтерпретації I має місце $I(\mathcal{F}) = 1 \Leftrightarrow I(\neg\mathcal{F}) = 0$ та $I(\mathcal{F}) = 0 \Leftrightarrow I(\neg\mathcal{F}) = 1$

Означення 2.4. *Формальна теорія називається несуперечливою, якщо не існує формули* $\mathcal{F}$ *такої, що* $\mathcal{F}$ *та* $\neg\mathcal{F}$ *є теоремами.*

Згадавши, що згідно означення формальна теорія є ще і формальною мовою, дамо наступне означення.

Означення 2.5. **Моделлю** *формальна теорії називаєтьса модель множини її теорем, тобто така інтерпретація I множини її формул, що*

$$\vdash \mathcal{F} \quad \Rightarrow I(\mathcal{F}) = 1.$$

Лема 2.1. *Якщо формальна теорія допускає принаймні одну модель, то вона несуперечлива.*

Доведення. Дійсно, якщо існує така формула $\mathcal{F}$, що $\vdash \mathcal{F}$ і $\vdash \neg\mathcal{F}$, то для інтерпретації I, що є моделлю цієї теорії будемо мати $I(\mathcal{F}) = I(\neg\mathcal{F}) = 1$, що неможливо. □

2.1 Числення висловлювань як формальна теорія.

Приймається синтаксис числення висловлювань, як формальної мови, де формули

$$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

$$\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \to \neg\mathcal{G})$$

$$\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \to \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \to \mathcal{F})$$

приймаються за означення зв'язок $\vee, \wedge, \leftrightarrow$.

Аксіоми числення висловлювань:

A1: $\mathcal{F} \to (\mathcal{G} \to \mathcal{F})$;

A2: $(\mathcal{F} \to (\mathcal{G} \to \mathcal{H})) \to ((\mathcal{F} \to \mathcal{G}) \to (\mathcal{F} \to \mathcal{H}))$

A3: $(\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F}) \to ((\neg\mathcal{G} \to \mathcal{F}) \to \mathcal{G}))$

Насправді тут слід говорити про схеми аксіом, оскільки в них замість літер можуть підставлятися довільні формули.

Правилом виводу є Modus Ponens:

$$\mathcal{F}, \mathcal{F} \to \mathcal{G} \vdash \mathcal{G}$$

Наведемо приклад доведення теореми $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ в численні висловлювань.

Теорема 2.1. *(Метатеорема) Формула $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ є теоремою числення висловлювання, тобто*

$$\vdash \mathcal{F} \to \mathcal{F}.$$

№	формула	коментар
1	$\mathcal{F} \to ((\mathcal{F} \to \mathcal{F}) \to \mathcal{F})) \to ((\mathcal{F} \to (\mathcal{F} \to \mathcal{F})) \to (\mathcal{F} \to \mathcal{F}))$	A2, де $\mathcal{G} := \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $\mathcal{H} := \mathcal{F}$
2	$\mathcal{F} \to ((\mathcal{F} \to \mathcal{F}) \to \mathcal{F})$	A1, де $\mathcal{G} := (\mathcal{F} \to \mathcal{F})$
3	$((\mathcal{F} \to (\mathcal{F} \to \mathcal{F})) \to (\mathcal{F} \to \mathcal{F}))$	Modus Ponens 1,2
4	$\mathcal{F} \to (\mathcal{F} \to \mathcal{F})$	A1, де $\mathcal{G} := \mathcal{F}$
5	$\mathcal{F} \to \mathcal{F}$	MP 3,4

З іншого боку, формула $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ є тавтологією (тотожно-істиною) формулою числення висловлювань, як формальної мови. Виникає природне питання: чи будь-яка теорема числення висловлювань, як формальної теорії є тотожно-істинною формулою числення висловлювань, як формальної мови ?

Теорема 2.2. *Будь-яка теорема числення висловлювань, як формальної теорії є тотожно-істинною формулою числення висловлювань, як формальної мови, тобто для будь-якої формули числення висловлювань $\mathcal{F}$ має місце імплікація*

$$\vdash \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \models \mathcal{F}.$$

Доведення. Доведення цієї метатеореми проводиться в два етапи:

I) показати, що всі три аксіоми - $A1, A2, A3$, числення висловлювань є тотожно-істинними формулами;

II) довести, що наше правило виводу - modus ponens, з тотожно-істинних формул виводить тотожно-істинні формули.

Виконання етапу I) залишаємо як вправу для самостійного виконання. Припустимо тепер, що формули $\mathcal{F}$ та $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ є тотожно-істинними і покажемо, що тоді і формула $\mathcal{G}$, яка виводиться з них за правилом modus ponens також є тотожно-істинною. Дійсно, оскільки формули $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ є тотожно-істинними, то для будь-якого інтерпретатора I маємо: $I(\mathcal{F}) = 1$, $I(\mathcal{F} \to \mathcal{G}) = 1$. Але за умови $I(\mathcal{F}) = 1$ рівність $I(\mathcal{F} \to \mathcal{G}) = 1$ можлива лише коли $I(\mathcal{G}) = 1$. Оскільки наші міркування проводилися для довільної інтерпретації I, то тим самим показано, що формула $\mathcal{G}$ є тотожно-істинною і виконано другий етап доведення.

Якщо формула $\mathcal{F}$ є теоремою, то існує її вивід - послідовність формул

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{s-1}, \mathcal{U}_s = \mathcal{F},$$

де кожна формула або аксіома, яка за п. I) є тотожно-істинною формулою, або отримана з попередніх формул за правилом modus ponens і за п. II) також є тотожно-істинною. Отже, всі формули $\mathcal{U}_i, i = 1, 2, \ldots, s$, в виводі теореми $\mathcal{F}$ є тотожно-істинними формулами, зокрема сама теорема $\mathcal{F}$ є тотожно-істинною формулою. □

Наслідок 2.1. *Будь-яке числення висловлювань є несуперечливою теорією.*

Доведення. Доведення проведемо методом від супротивного: припустимо, що в численні висловлювань існує формула $\mathcal{G}$ така, що вона та формула $\neg\mathcal{G}$ є теоремами. Тоді за вищенаведеною теоремою обидві ці формули є тавтологіями, що очевидно є неможливим. □

Побудова формального виводу та доведення теорем у формальних теоріях є досить кропіткою і важкою працею. Наступна метатеорема часом може спростити цю роботу.

Теорема 2.3. *(***Метатеорема дедукції***) Нехай* $\Gamma-$ *деяка множина формул числення висловлювань і* $\mathcal{A}$ *деяка формула. Якщо* $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{F}$ *(формула* $\mathcal{F}$ *виводитьсяя з множини формул* Γ *і формули* $\mathcal{A}$*), то* $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{F}$.

Доведення. Доведення теореми проведемо методом математичної індукції по довжині виводу формули $\mathcal{F}$. Нехай $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_s = \mathcal{F}-$ вивід формули $\mathcal{F}$ з множини формул $\Gamma, \mathcal{A}$.

База індукції: $s = 1$. У цьому випадку $\mathcal{U}_1 = \mathcal{F}$ і це можливо лише за одної з трьох умов:

а) $\mathcal{F} \in \Gamma$;

б) $\mathcal{F}-$ аксіома;

в) $\mathcal{F} = \mathcal{A}$.

у випадку а) маємо

№	формула	коментар
1	$\mathcal{F}$	гіпотеза
2	$\mathcal{F} \to (\mathcal{A} \to \mathcal{F})$	A1, де $\mathcal{G} := \mathcal{A}$
3	$\mathcal{A} \to \mathcal{F}$	MP 1,2

У випадку б) доведення дослівно повторюється. А у випадку с) маємо раніше доведену метатеорему 2.1 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Цим базу індукції доведено.

Індукційний крок. Припустимо, що метатеорема дедукції має місце для формул $\mathcal{F}$, довжина виводу яких з множини формул $\Gamma, \mathcal{A}$ менша за s. Тоді, за припущенням індукції, для довільного $k : 1 \leq k < s$, має місце:

$$\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{U}_k,$$

а для формули $\mathcal{U}_s$ є чотири можливості

а) $\mathcal{F} \in \Gamma$;

б) $\mathcal{F}-$ аксіома;

в) $\mathcal{F} = \mathcal{A}$;

г) існують $i, j : 1 \leq i, j < s$ такі, що $\mathcal{U}_j = \mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_s$, тобто $\mathcal{U}_s$ отримана за правилом modus ponens.

У перших трьох випадках міркування, проведені при доведенні бази індукції, дослівно повторюються. У випадку 4), користуючись припущенням індукції, отримуємо

$$\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{U}_i, \quad \Gamma \vdash \mathcal{A} \to (\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_s).$$

За схемою аксіом $A2$, отримуємо

$$(\mathcal{A} \to (\mathcal{U}_i \to \mathcal{U}_s)) \to ((\mathcal{A} \to \mathcal{U}_i) \to (\mathcal{A} \to \mathcal{U}_s)).$$

Застосувавши два рази modus ponens отримуємо $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{U}_s$. Для завершення доведення залишилося згадати, що $\mathcal{U}_s = \mathcal{F}$. □

Приклад 1. Довести перше правило силогізму:

$$\mathcal{A} \to \mathcal{B}, \mathcal{B} \to \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{C}$$

Приклад 2. Довести друге правило силогізму:

$$\mathcal{A} \to (\mathcal{B} \to \mathcal{C}), \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{C}.$$

Питання. Чи є правильним твердження обернене до теореми дедукції?

Наведемо теореми числення висловлювань, які будуть потрібні нам далі.

a) $\vdash \neg\neg\mathcal{F} \to \mathcal{F}$

b) $\vdash \mathcal{F} \to \neg\neg\mathcal{F}$

c) $\vdash \neg\mathcal{F} \to (\mathcal{F} \to \mathcal{G})$

d) $\vdash (\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F}) \to (\mathcal{F} \to \mathcal{G})$

e) $\vdash (\mathcal{F} \to \mathcal{G}) \to (\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F})$

f) $\vdash \mathcal{F} \to (\neg\mathcal{G} \to \neg(\mathcal{F} \to \mathcal{G}))$

g) $\vdash (\mathcal{F} \to \mathcal{G}) \to ((\neg\mathcal{F} \to \mathcal{G}) \to \mathcal{G})$

Наведемо доведення теореми a)

№	формула	коментар
1	$(\neg\mathcal{F} \to \neg\neg\mathcal{F}) \to ((\neg\mathcal{F} \to \neg\mathcal{F}) \to \mathcal{F})$	A3, де $\mathcal{G} := \mathcal{F}, \mathcal{F} := \neg\mathcal{F}$
2	$\neg\mathcal{F} \to \neg\mathcal{F}$	Раніше доведена теорема 2.1
3	$(\neg\mathcal{F} \to \neg\neg\mathcal{F}) \to \mathcal{F}$	Друге правило силогізму
4	$\neg\neg\mathcal{F} \to (\neg\mathcal{F} \to \neg\neg\mathcal{F}))$	A1, де $\mathcal{F} := \neg\neg\mathcal{F}, \mathcal{G} := \neg\mathcal{F}$
5	$\neg\neg\mathcal{F} \to \mathcal{F}$	З 3, 4 за першим правилом силогізму.

Побудова виводу решти теорем виноситься на самостійне опрацювання.

Означення 2.6. *Формальна теорія* **T** *, алфавіт якої не містить вільних змінних і список аксіом якої містить в собі схеми аксіом $A1, A2, A3$ і правилом виводу якої є modus ponens називається* **теорією 0-го порядку***; аксіоми цієї теорії, які не попадають під схеми $A1, A2, A3$ називаються* **спеціальними** *аксіомами теорії.*

Як було показано, числення висловлювань є несуперечливою теорією. В той же час, приєднання спеціальних аксіом може привести до того, що отримана теорія 0-го порядку стане суперечливою.

Лема 2.2. *В суперечливій теорії 0-го порядку будь-яка формула є теоремою.*

Доведення. Нехай $\mathcal{G}$– довільна формула нашої теорії. Якщо теорія суперечлива, то існує формула $\mathcal{F}$ така, що вона та $\neg\mathcal{F}$ є теоремами. Скористаємося теоремою c) з вищенаведеного списку теорем числення висловлювань:

$$\vdash \neg\mathcal{F} \to (\mathcal{F} \to \mathcal{G}).$$

Очевидно, що вона буде теоремою і в нашій теорії. Подвійне застосування правила modus ponens приводить до висновку, що формула $\mathcal{G}$ є теоремою, що і доводить лему. □

Питання про те чи має місце твердження обернене до метатеореми 2.2 є значно більш складним. Для його доведення нам потрібно провести певну підготовчу роботу.

Нехай $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots)$– певна формула числення висловлювань, яка залежить від простих висловлювань $a, b, c, \ldots$. Для довільної інтерпретації I і простого висловлювання a введемо позначення

$$a^I = \begin{cases} a & \text{якщо} \quad I(a) = 1 \\ \neg a & \text{якщо} \quad I(a) = 0 \end{cases}, \quad \mathcal{F}^I = \begin{cases} \mathcal{F} & \text{якщо} \quad I(\mathcal{F})(I(a), I(b), I(c), \ldots) = 1 \\ \neg\mathcal{F} & \text{якщо} \quad I(\mathcal{F})(I(a), I(b), I(c), \ldots) = 0 \end{cases}$$

Лема 2.3. *Для довільної формули $\mathcal{F}$ і довільної її інтерпретації I має місце*

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{F}^I(a, b, c, \ldots).$$

Приклад. $\mathcal{F} = \neg(\neg a \to b)$. Нехай інтерпретація I така, що $I(a) = 1$, а $I(b) = 0$. Тоді

$$a^I = a, \; b^I = \neg b, \mathcal{F}^{\mathcal{I}} = \neg\mathcal{F} = \neg\neg(\neg a \to b)$$

і лема стверджує, що з формул a та $\neg b$ виводиться формула $\neg\neg(\neg a \to b)$, тобто

$$a, \neg b \vdash \neg\neg(\neg a \to b).$$

Доведення. Доведення леми проведемо методом математичної індукції по кількості n логічних зв'язок, що містить формула $\mathcal{F}$.

База індукції. $n = 0$. Це означає, що формула $\mathcal{F}$ є простим висловлюванням, тобто має вид $\mathcal{F} = a$. Якщо $I(a) = 1$, то лема стверджує, що $a \vdash a$, а якщо $I(a) = 0$, то $\neg a \to \neg a$. Обидва твердження очевидні.

Індукційний крок. Припустимо, що твердження леми має місце для формул, кількість зв'язок яких менша за n. Нехай формула $\mathcal{F}$ містить n логічних зв'язок. Головною зв'язкою формули $\mathcal{F}$ можуть бути:

1) $\neg$

2) $\to$

У випадку 1) формула має вигляд $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, де кількість логічних зв'язок формули $\mathcal{G}$ дорівнює $n-1$ і до неї можна застосувати припущення індукції. Якщо інтерпретація I така, що $I(\mathcal{G}) = 1$, то $I(\mathcal{A}) = 0$ і за припущенням індукції маємо:

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{G}(a, b, c, \ldots).$$

В цьому випадку $\mathcal{F}^I = \neg\mathcal{F} = \neg\neg\mathcal{G}$. З іншого боку, за теоремою b) з вищенаведеного списку маємо $\vdash \mathcal{G} \to \neg\neg\mathcal{G}$ і застосувавши правило modus ponens отримаємо

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \neg\neg\mathcal{G}(a, b, c, \ldots) = \mathcal{F}^I.$$

Розглянемо тепер випадок коли інтерпретація I така, що $I(G) = 0$. Тоді, $G^I = \neg G$ і за припущенням індукції, маємо

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \neg\mathcal{G}(a, b, c, \ldots).$$

Оскільки при цьому, $I(F) = 1$ і $\mathcal{F}^I = \mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$, то твердження очевидне.

Розглянемо тепер випадок 2), коли формула має вигляд $\mathcal{F} = \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, де формули $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ містять меншу кількість зв'язок і до них можна застосувати припущення індукції. Розглянемо три випадки, які покривають всі можливості:

2.1) $I(\mathcal{G}) = 0$;

2.2) $I(\mathcal{H}) = 1$;

2.3) $I(\mathcal{G}) = 1$ і $I(\mathcal{H}) = 0$.

У випадку 2.1 маємо $I(\mathcal{F}) = 1, \mathcal{F}^I = \mathcal{F} = \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, а за припущенням індукції

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \neg\mathcal{G}$$

Скористаємося раніше отриманою теоремою c), згідно якої будемо мати

$$\vdash \quad \neg\mathcal{G} \to (\mathcal{G} \to \mathcal{H}).$$

За modus ponens, отримуємо

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{G} \to \mathcal{H} = \mathcal{F},$$

що і треба було довести.

У випадку 2.2 також маємо $I(\mathcal{F}) = 1, \mathcal{F}^I = \mathcal{F} = \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, а за припущенням індукції

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{H}.$$

За аксіомою A1, отримуємо $\vdash \mathcal{H} \to (\mathcal{G} \to \mathcal{H})$ і знову за modus ponens, отримуємо

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{G} \to \mathcal{H}.$$

В останньому випадку 2.3 маємо $I(\mathcal{G}) = 1, I(\mathcal{H}) = 0$ і $\mathcal{F}^I = \neg\mathcal{F} = \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H})$. За припущенням індукції,

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{G},$$
$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \neg\mathcal{H}.$$

Застосуємо теорему f), згідно якої

$$\mathcal{G} \to (\neg\mathcal{H} \to \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H})).$$

Залишилося два рази застосувати modus ponens і отримати

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H}).$$

□

Теорема 2.4. *Будь-яка тотожно-істинною формула числення висловлювань, як формальної мови, є теоремою відповідної формальної теорії, тобто для будь-якої формули числення висловлювань $\mathcal{F}$ має місце імплікація*

$$\models \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \vdash \mathcal{F}.$$

Доведення. Нехай $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b, c, \ldots)$– тавтологія, тоді, згідно попередньої леми, будемо мати

$$a^I, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{F},$$

для довільної інтерпретації I, оскільки для тотожно-істинної формули$\mathcal{F}^I = \mathcal{F}$. Тоді застосування інтерпретації I, що приймає значення 1 на висловлюванні a приводить до

$$a, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{F},$$

а використання інтерпретації $I: \quad I(a) = 0$ має наслідком

$$\neg a, b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{F}.$$

Застосуємо теорему дедукції:

$$b^I, c^I, \ldots \vdash a \to \mathcal{F},$$
$$b^I, c^I, \ldots \vdash \neg a \to \mathcal{F}$$

і теорему g) у такому вигляді:

$$(a \to \mathcal{F}) \to ((\neg a \to \mathcal{F}) \to \mathcal{F}).$$

Подвійне застосування правила modus ponens має наслідком:

$$b^I, c^I, \ldots \vdash \mathcal{F}.$$

Таким чином нам вдалося звільнити список гіпотез від висловлювання a. Можна продовжити ці міркування для висловлювань $b, c, \ldots$ і зробити список гіпотез порожнім, тобто отримати

$$\vdash \mathcal{F},$$

що означає, що $\mathcal{F}$ є теоремою. □

2.2 Числення предикатів як формальна теорія.

Синтаксис числень предикатів залишаємо таким же, як і для формальних мов. Покладемо за означенням

$$\exists x \mathcal{F}(x, \ldots) = \neg \forall x \neg \mathcal{F}(x, \ldots).$$

Для формулювання аксіом числення предикатів нам знадобиться таке

Аксіоми числення предикатів

A1: $\mathcal{F} \to (\mathcal{G} \to \mathcal{F})$;

A2: $(\mathcal{F} \to (\mathcal{G} \to \mathcal{H})) \to ((\mathcal{F} \to \mathcal{G}) \to (\mathcal{F} \to \mathcal{H}))$

A3: $(\neg \mathcal{G} \to \neg \mathcal{F}) \to ((\neg \mathcal{G} \to \mathcal{F}) \to \mathcal{G}))$

A4: $\forall x \mathcal{F}(x) \to \mathcal{F}(t)$,
де t - терм вільний для x у формулі $\mathcal{F}(x)$.

A5: $(\forall x(\mathcal{F} \to \mathcal{G})) \to (\mathcal{F} \to \forall x \mathcal{G})$,
якщо формула $\mathcal{F}$ не залежить від x.

Правилами виводу в численні предикатів є modus ponens

$$\mathcal{F}, \mathcal{F} \to \mathcal{G} \vdash \mathcal{G}$$

і правило узагальнення Gen

$$\mathcal{F}(x) \vdash \forall x \mathcal{F}(x).$$

Наведемо декілька прикладів формальних виводів числення предикатів.

$$\forall x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \forall x A(x, y)$$

№	формула	коментар
1	$\forall x \forall y A(x, y)$	гіпотеза
2	$\forall x \forall y A(x, y) \to \forall y A(x, y)$	A4, де $\mathcal{F} := \forall y A(x, y), t = x$
3	$\forall y A(x, y)$	з 1,2 за M.P.
4	$\forall y A(x, y) \to A(x, y)$	A4, де $\mathcal{F} := A(x, y), t = y$
5	$A(x, y)$	з 3,4 за M.P.
6	$\forall x A(x, y)$	з 5 за правилом Gen
7	$\forall y \forall x A(x, y)$	з 6 за правилом Gen

Теорема 2.5. *Будь-яка теорема числення предикатів, як формальної теорії є тотожно-істинною формулою числення предикатів, як формальної мови, тобто для будь-якої формули числення предикатів $\mathcal{F}$ має місце імплікація*

$$\vdash \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \models \mathcal{F}.$$

Доведення. Доведення цієї теореми проводиться по тій же схемі, що і в теоремі 2.2 для числення висловлювань. Отже, для завершення виконання етапу 1) слід переконатися, що аксіоми A4, A5 є тотожно-істинною формулою і застосування правила *Gen* до тотожно-істинної формули дасть нам тотожно-істинну формулу. □

Як і в численні висловлювань маємо такий наслідок

Наслідок 2.2. *Будь-яке числення предикатів є несуперечливою теорією.*

Доведення дослівно переноситься з числення висловлювань.

Звернемо увагу на те, що теорема дедукції переноситься на числення предикатів з деякими застереженнями. Дійсно, за правилом Gen маємо $A(x) \vdash \forall x A(x)$. Але формула $A(x) \to \forall x A(x)$ не є тотожно-істинною:

$$D = \{a, b\}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & a & b \\ \hline I_c(A) & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad I_v(x) = a,$$

а отже за попереднім твердженням 2.5 не є теоремою - $\nvdash A(x) \to \forall x A(x)$.

Все ж таки при певних додаткових обмеженнях метатеорема дедукції має місце і в численні предикатів.

Теорема 2.6. *(***Метатеорема дедукції в численні предикатів.***) Нехай $\Gamma-$ деяка множина формул числення висловлювань і $\mathcal{A}$ деяка формула. Нехай $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{F}$ (формула $\mathcal{F}$ виводиться з множини формул Γ і формули $\mathcal{A}$), і при цьому не застосовується правило Gen по вільним змінним формули A, тоді $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{F}$.*

Доведення. Доведення теореми проведемо методом математичної індукції по довжині виводу формули $\mathcal{F}$. Нехай $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_s = \mathcal{F}-$ вивід формули $\mathcal{F}$ з множини формул $\Gamma, \mathcal{A}$. Очевидно, що досить розглянути випадок коли $F = \forall x U_i(x)$ і отримано застосуванням правила *Gen*. За припущенням індукції маємо $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{U}_i$. За зробленим припущенням x не є вільною змінною формули $\mathcal{A}$. Тоді за схемою аксіом 5 маємо $(\forall x(A \to \mathcal{U}_i)) \to (A \to \forall x U_i(x))$. Оскільки, $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{U}_i$, то за правилом *Gen* : $\Gamma \vdash \forall x(\mathcal{A} \to \mathcal{U}_i)$. Звідки застосувавши М.Р. маємо потрібний результат. □

Наслідок 2.3. *Якщо формула $\mathcal{A}$ є замкненою і $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{F}$, то $\Gamma \vdash \mathcal{A} \to \mathcal{F}$.*

Розглянемо приклади на застосування метатеореми дедукції.

1. $\vdash \forall x \forall y A(x, y) \to \forall y \forall x A(x, y)$.

В попередньому прикладі було доведено, що $\forall x \forall y A(x, y) \vdash \forall y \forall x A(x, y)$. Покладемо $\Gamma = \varnothing$, $\mathcal{A} := \forall x \forall y A(x, y)$. Оскільки остання формула є замкненою, то можна застосувати метатеорему дедукції і отримати потрібний результат.

2. $\vdash \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \forall x B(x))$

Покажемо спочатку, що з формул $\forall x(A(x) \to B(x))$, $\forall x A(x)$ виводиться формула $\forall x B(x)$.

№	формула	коментар
1	$\forall x(A(x) \to B(x)) \to (A(x) \to B(x))$	А4, де $\mathcal{F} := A(x) \to B(x)$, $t := x$
2	$\forall x(A(x) \to B(x))$	гіпотеза
3	$A(x) \to B(x)$	з 1,2 за М.Р.
4	$\forall x A(x)$	гіпотеза
5	$\forall x A(x) \to A(x)$	А4, де $\mathcal{F} := A(x)$, $t := x$
6	$A(x)$	з 4,5 за М.Р.
7	$B(x)$	з з 3,6 за М.Р.
8	$\forall x B(x)$	з 7 за правилом Gen

Оскільки обидві гіпотези є замкненими формулами, то двічі застосувавши метатеорему дедукції отримуємо потрібний результат: спочатку $\forall x(A(x) \to B(x)) \vdash \forall x A(x) \to \forall x B(x)$, а потім $\vdash \forall x(A(x) \to B(x)) \to (\forall x A(x) \to \forall x B(x))$.

Означення 2.7. *Формальна теорія* $\mathbf{T}$, *список аксіом якої містить в собі схеми аксіом* $A1, A2, A3, A4, A5$ *і правилом виводу якої є modus ponens і правило узагальнення Gen називається* **теорією 1-го порядку***; аксіоми цієї теорії відмінні, які не належать схемам* $A1, A2, A3, A4, A5$ *називаються* **спеціальними** *аксіомами теорії.*

Зауваження 2.1. *Звертаємо увагу на те, що спеціальні аксіоми не є тотожно-істинними формулами, а тому при наявності таких аксіом, стверджувати, що теореми такої теорії першого порядку є тотожно істинними формулами (див. теорему 2.5) ми не можемо.*

Зауваження 2.2. *Зауважимо, що згідно правила Gen, замикання спеціальної аксіоми є теоремою теорії. З іншого боку, за допомогою схеми аксіоми A4 з замикання спеціальної аксіоми, можна вивести саму аксіому. Отже, заміна спеціальних аксіом на їх замикання дає ту саму теорію.*

Приклад 2.1. *Розглянемо формальну теорію з термінальним алфавітом* $A_0 = \{L, x, y, z, \ldots\}$, *де* $L-$ *предикатна константа, а* $x, y, z, \ldots -$ *зліченний набір змінних, і множини спеціальних символів* $A_s = \{\vee, \wedge, \to, \neg, (,), \forall, \exists\}$. *Для правильно побудованих формул числення предикатів на цьому алфавіті приймаємо схеми загальних аксіом* $A1, A2, A3, A4, A5$ *і дві спеціальні аксіоми:*

AS1: $\forall x \quad \neg L(x, x)$,

AS2: $\forall x \forall y \forall z \quad L(x, y) \to (L(y, z) \to L(x, z))$.

Звернемо увагу на те, що в схеми аксіом $A1, A2, A3, A4, A5$ замість формул $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ можна підставляти довільні правильно побудовані формули у вказаному алфавіті, а спеціальні аксіоми таких підстановок не допускають. Неважко побачити, що $L(x, y) \equiv x \prec y$, то $AS1$ та $AS2$ є аксіомами відношення часткового порядку - антирефлексивність та транзитивність (див. курс Основи дискретної математики).

Приклад 2.2. *Розглянемо формальну теорію з термінальним алфавітом* $A_0 = \{E, f, 0, x, y, z, \ldots\}$, *де* $E-$ *предикатна константа арності 2,* $f-$ *функціональна константа арності 2, 0- функціональна константа арності 0 (просто константа), а* $x, y, z, \ldots -$ *зліченний набір змінних, і множини спеціальних символів* $A_s = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, (,), \forall, \exists\}$. *Для правильно побудованих формул числення предикатів на цьому алфавіті приймаємо схеми загальних аксіом* $A1, A2, A3, A4, A5$ *і спеціальні аксіоми, при формулюванні яких ми будемо користуватися такими позначеннями:* $f(x, y) \equiv x + y, E(x, y) \equiv (x = y)$.

AS1: $\forall x \forall y \forall z \ \ ((x + y) + z) = (x + (y + z))$;

AS2: $\forall x (0 + x = x)$;

AS3: $\forall x \exists y (y + x) = 0$;

AS4: $\forall x (x = x)$;

AS5: $\forall x \forall y (x = y) \rightarrow (y = x)$;

AS6: $\forall x \forall y \forall z \ \ (x = y \rightarrow ((y = z) \rightarrow (x = z)))$;

AS7: $\forall x \forall y \forall z \ \ ((y = z) \rightarrow ((x + y = x + z) \wedge (y + x = z + x)))$

Приклад 2.3. *Наступний приклад з аксіоматики геометрій. Розглянемо формальну теорію з термінальним алфавітом* $A_0 = \{E, P, L, I, x, y, z, \ldots\}$, *де* E *та* I *предикатні константи арності 2,* P *та* L *предикатні константи арності 1. Змінвши позначення для* $E: \ E(x, y) \equiv (x = y)$, *введемо спеціальні аксіоми*

AS1: $\forall x (x = x)$;

AS2: $\forall x \forall y (x = y) \rightarrow (y = x)$;

AS3: $\forall x \forall y \forall z \ \ (x = y \rightarrow ((y = z) \rightarrow (x = z)))$;

AS4: $\forall x \forall y (\neg (x = y) \wedge P(x) \wedge P(y)) \rightarrow \exists z (L(z) \wedge I(x, z) \wedge I(y, z))$;

AS5: $\forall x \forall y ((\neg (x = y) \wedge P(x) \wedge P(y)) \rightarrow$
$(\forall z \forall u (L(z) \wedge I(x, z) \wedge I(y, z) \wedge L(u) \wedge I(x, u) \wedge I(y, u)) \rightarrow (z = y)))$

AS6: $\forall x (L(x) \rightarrow (\exists y L(y) \rightarrow (\forall z P(z) \rightarrow \neg (I(z, x) \wedge I(z, y)))))$;

AS7: $\forall x (L(x) \rightarrow ((\exists y L(y) \rightarrow (\forall z P(z) \rightarrow \neg (I(z, x) \wedge I(z, y)))) \wedge (\exists u L(u) \rightarrow (\forall z P(z) \rightarrow$
$\neg (I(z, x) \wedge I(z, u)))) \rightarrow (x = u))$

Приклад 2.4. *Розглянемо формальну теорію S з алфавітом $A_0 = \{0, N, Ad, Mult, E, x, y, z, \ldots\}$, де 0- функціональна константа 0 (просто константа), $N-$ функціональна константа арності 1, $E-$ предикатна константа арності 2, а $x, y, z, \ldots -$ зліченний набір змінних, і множини спеціальних символів $A_s = \{\vee, \wedge, \rightarrow, \neg, (,), \forall, \exists\}$. Для правильно побудованих формул числення предикатів на цьому алфавіті приймаємо схеми загальних аксіом $A1, A2, A3, A4, A5$ і спеціальні аксіоми, при формулюванні яких ми будемо користуватися такими позначеннями: $Ad(x, y) \equiv x + y, Mult(x, y) \equiv x \cdot y, E(x, y) \equiv (x = y)$.*

S1 $\forall x \forall y \forall z \quad (x = y) \rightarrow (x = z \rightarrow y = z)$;

S2 $\forall x \forall y \quad (x = y) \rightarrow N(x) = N(y)$;

S3 $\forall x \quad \neg(N(x) = 0)$;

S4 $\forall x \forall y \quad (N(x) = N(y)) \rightarrow x = y$;

S5 $\forall x \quad x + 0 = x$

S6 $\forall x \forall y \quad x + N(y) = N(x + y)$;

S7 $\forall x \quad x \cdot 0 = 0$;

S8 $\forall x \forall y \quad x \cdot N(y) = x \cdot y + x$;

S9 $\mathcal{F}(0) \rightarrow (\forall x(\mathcal{F}(x) \rightarrow \mathcal{F}(N(x))) \rightarrow \forall x \mathcal{F}(x))$,

де $\mathcal{F}(x)-$ довільна формула теорії.

Теорема 2.7. *Будь яка модель множини замикань спеціальних аксіом теорії першого порядку є моделлю цієї теорії.*

Доведення. Припустимо, що деяка інтерпретація I^* є моделлю для множини замикань спеціальних аксіом теорії. Нам потрібно довести імплікацію

$$\vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{F} \Rightarrow I^*(\mathcal{F}) = 1.$$

Оскільки загальні аксіоми теорії першого порядку є тотожно істинними формулами, то значення будь-якого інтерпретатора, а отже і I^*, на них буде дорівнювати 1. Виникає природне питання: якщо на вхід правил виводу подано формули для яких дана інтерпретація є моделлю, то чи буде вона моделлю формули, яка отримана на виході? Для modus ponens це очевидно так:

$$I(\mathcal{F}) = 1, I(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}) = 1 \Rightarrow I(\mathcal{G}) = 1.$$

Правило узагальнення Gen

$$\mathcal{F}(x) \vdash \forall x \mathcal{F}(x),$$

взагалі кажучи, не має такої властивості, тобто якщо $I(\mathcal{F}(x)) = I_c(F)(I_v(x)) = 1$, то може бути так, що $I(\forall x \mathcal{F}(x)) = 0$. Наприклад нехай $\mathcal{F} = A(x)-$ атомарна формула і розглянемо її модель на множині $D = \{a, b\}$ для якої предикат $I_c(A)(x)$ визначається наступною таблицею;

	a	b
$I_c(A)$	1	0

,

а вільній змінній надамо значення a, тобто $I_v(x) = a$, тоді очевидно
$I(A(x)) = I_c(A)(I_v(x)) = 1$, в той час як $I(\forall x A(x)) = 0$. В той же час правило Gen має таку більш слабу властивість: якщо $\mathcal{F}(x)$ є тотожно істиною формулою або є замкненою формулою, то для таких формул маємо імплікацію

$$I(\mathcal{F}(x)) = 1 \quad \Rightarrow I(\forall x \mathcal{F}(x)) = 1.$$

Очевидно, також що

$$I(\forall x \mathcal{F}(x)) = 1 \quad \Rightarrow \quad I(\mathcal{F}(I_v(x))) = 1 \text{ для будь-якого значення } I_v(x).$$

Згідно зробленого вище зауваження заміна спеціальних аксіом на їх замикання дає ту саму теорію.

Отже, для будь-якої теореми $\mathcal{F}$, будемо мати $I^*(\mathcal{F}) = 1$, що означає, що I^* є моделлю цієї теорії. □

Виходячи з цього спробуємо побудувати модель теорії з прикладу 2.1. Оберемо область інтерпретації $D = \{a, b, c\}$, а предикатній константі L поставимо у відповідність бінарний предикат $I_c(L)$, який задамо таблицею:

$\frac{y}{x}$	a	b	c
a	0	1	1
b	0	0	1
c	0	0	0

Проста перевіркою легко переконатися, що значення цього інтерпретатора на обох спеціальних аксіомах дорівнює 1, а оскільки вони обидві є замкненими формулами, то за попередньою теоремою дана інтерпретація є моделлю всієї теорії часткового порядку.

Задача. Побудувати модель теорії першого порядку з прикладу 2.2.

Означення 2.8. *Аксіома теорії називається незалежною від інших аксіом, якщо вона не виводиться з решти аксіом.*

Теорема 2.8. *Якщо формальна теорія в якій замкнена аксіома $\mathcal{A}$ замінена на її заперечення $\neg\mathcal{A}$, а решта аксіом залишена без зміни, має модель, то аксіома $\mathcal{A}$ не виводиться з решти аксіом.*

Доведення. □

Як і для теорій 0-го порядку маємо.

Лема 2.4. *У суперечливій теорії будь-яка формула є теоремою.*

Отримати аналог теореми 2.4 для числення предикатів значно важче. Але для певного вузького класу тотожно-істинних формул числення предикатів результат виводиться із вказаної теореми.

Лема 2.5. *Якщо тотожно-істинна формула числення предикатів отримана шляхом підстановки у тавтологію числення висловлювань формул числення предикатів, то вона є теоремою числення предикатів.*

Доведення. Справді, за доведеною теоремою вказана тавтологія є теоремою і для неї існує вивід у численні висловлювань. Зробивши ту ж саму підстановку у всі формули виводу ми очевидно отримаємо вивід формули у численні предикатів. □

Означення 2.9. *Теорія* $\widetilde{\mathbf{T}}$ *називається розширенням теорії* $\mathbf{T}$, *множина формул теорії* $\widetilde{\mathbf{T}}$ *містить множину формул теорії* $\mathbf{T}$ *і кожна аксіома теорії* $\mathbf{T}$ *входить в список аксіом теорії* $\widetilde{\mathbf{T}}$. *Умовно це буде записуватися* $\mathbf{T} \subset \widetilde{\mathbf{T}}$.

Лема 2.6. *Якщо замкнена формула* $\neg\mathcal{F}$ *не є теоремою в теорії* $\mathbf{T}$, *то її розширення, яке отримано додаванням формули* $\mathcal{F}$ *до списку аксіом теорії* $\mathbf{T}$ *є несуперечливим.*

Доведення. Доведення теореми проведемо методом від супротивного. Припустимо, що отримана теорія $\widetilde{\mathbf{T}}$ є суперечливою. Це означає, що існує формула $\mathcal{G}$ цієї теорії така, що вона і її заперечення є теоремами, тобто

$$\vdash_{\widetilde{\mathbf{T}}} \mathcal{G}, \quad \vdash_{\widetilde{\mathbf{T}}} \neg\mathcal{G}.$$

Легко переконатися, що формула $\mathcal{G} \to (\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F})$ є тотожно-істинною і за лемою 2.5 є теоремою теорії $\widetilde{\mathbf{T}}$, тобто

$$\vdash_{\widetilde{\mathbf{T}}} \mathcal{G} \to (\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F}).$$

Застосуванням modus ponens отримуємо $\vdash_{\widetilde{\mathbf{T}}} \neg\mathcal{F}$, звідки $\mathcal{F} \vdash_{\mathbf{T}} \neg\mathcal{F}$. Оскільки формула замкнена, то можна застосувати теореми дедукції: $\vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{F} \to \neg\mathcal{F}$. з іншого боку маємо тотожно-істинну формулу $(\mathcal{F} \to \neg\mathcal{F}) \to \neg\mathcal{F})$, яка внаслідок леми 2.5 є теоремою теорії $\mathbf{T}$, тобто маємо

$$\vdash_{\mathbf{T}} (\mathcal{F} \to \neg\mathcal{F}) \to \neg\mathcal{F}).$$

Звідси за m.p. отримуємо суперечність: $\vdash_{\mathbf{T}} \neg\mathcal{F}-$ формула $\neg\mathcal{F}$ є теоремою теорії $\mathbf{T}$. Отримана суперечність доводить лему. □

Означення 2.10. *Теорія* T *називається повною, якщо для будь-якої замкненої формули* $\mathcal{F}$ *або вона або її заперечення є теоремою, тобто*

$$\textit{або} \quad \vdash_{\mathbf{T}} \mathcal{F} \quad \textit{або} \quad \vdash_{\mathbf{T}} \neg\mathcal{F}$$

Лема 2.7. *(Ліндендаума). Якщо теорія першого порядку* $\mathbf{T}$ *є несуперечливою, то існує несуперечливе повне її розширення.*

Доведення. Нехай $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \dots$ є злічення послідовність всіх замкнених формул теорії $\mathbf{T}$. Побудуємо послідовність теорій $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots$ за індукцією:

1. $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}$;

2. нехай теорія $\mathbf{T}_n$ визначена, і формула $\neg\mathcal{G}_{n+1}$ не є теоремою теорії $\mathbf{T}_n$, тоді теорія $\mathbf{T}_{n+1}$ отримується шляхом додавання в якості аксіоми формули $\mathcal{G}_{n+1}$. В протилежному випадку покладемо $\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_n$. Нехай

$$\widetilde{\mathbf{T}} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbf{T}_n -$$

теорія список аксіом якої складається з усіх аксіом теорій $\mathbf{T}_n$. Для доведення несуперечливості отриманої теорії, очевидно досить довести для кожного n несуперечливість теорії $\mathbf{T}_n$. Зробимо це індукцією по номеру n.

База індукції, очевидна, бо за умовою леми теорія $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}$ є несуперечливою.

Індукційний крок. Якщо $\mathbf{T}_n$– несуперечлива і $\mathbf{T}_{n+1} = \mathbf{T}_n$, то твердження очевидне. Якщо ж $\mathbf{T}_{n+1} \neq \mathbf{T}_n$, то несуперечливість теорії випливає з попередньої леми. □

Теорема 2.9. *Будь-яка несуперечлива теорія 1-го порядку має зліченну модель.*

Нехай $T-$ несуперечлива теорія 1-го порядку. Додамо до алфавіту цієї теорії зліченну кількість констант $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$, які буде дозволено підставляти в схеми аксіом цієї теорії. Легко бачити, що отримана теорія T_0 також є несуперечливою. Дійсно, якщо для деякої формули $\mathcal{F}$ має місце і $\vdash_{T_0} \mathcal{F}$ і $\vdash_{T_0} \neg\mathcal{F}$, то можна обрати зліченну послідовність змінних, які не є вільними змінними формули $\mathcal{F}$, наприклад $z_1, z_2, \dots, z_n \dots$ і зробити заміни $z_i \to \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ у формулі $\mathcal{F}$. При цьому отримаємо $\vdash_T \mathcal{F}(z_i \to \beta_i)$ і $\vdash_T \neg\mathcal{F}(z_i \to \beta_i)$, що означає суперечність самої теорії T. Отже, теорія T_0- несуперечлива.

Нехай $U_1(x_{i_1}), U_2(x_{i_2}), \dots, U_k(x_{i_k}), \dots -$ який небудь перелік формул теорії T_0, що містять не більше як одну вільну змінну. Нагадаємо, що множина формул теорії першого порядку є зліченною і який небудь перелік таких формул можна здійснити. Алгоритми побудови нумерації формул будуть розглянуті пізніше. Співставимо, послідовності формул $U_1(x_{i_1}), U_2(x_{i_2}), \dots, U_k(x_{i_k}), \dots$ послідовність констант $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_k}, \dots$ таким чином, щоб для кожного номера k константа β_k не була присутня у формулах $U_1(x_{i_1}), U_2(x_{i_2}), \dots, U_k(x_{i_k})$.

Розглянемо формули теорії T_0 :

$$S_k : \qquad \neg\forall x_{i_k} U_k(x_{i_k}) \to \neg U_k(\beta_{j_k}), \tag{2.2}$$

$k = 1, 2, \dots$. Визначимо теорію T_n, як розширення теорії T_0 шляхом додавання до списку її аксіом формул $S_1, S_2, \dots, S_n$. Теорію T_∞ визначимо, як розширення T_0 шляхом додавання до списку її аксіом зліченної кількості формул $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Умовно це можна записати таким чином

$$T_\infty = \bigcup_{n=1}^{+\infty} T_n.$$

Доведемо, що отримана у такий спосіб теорія T_∞ є **несуперечливою**. Оскільки вивід кожної формули містить скінченну кількість формул, то кожен вивід формули в T_∞ э виводом в теорії T_n для достатньо великого n. Отже для доведення несуперечливості теорії T_∞ слід показати, що всі теорії $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ є несуперечливими. Зробимо це методом математичної індукції по n.

База індукції - $n = 0$. Теорія T_0 є несуперечливою, це було показано раніше.

Індукційний крок. Припустимо, що теорія T_{n-1} є несуперечливою і виведемо звідси, що і теорія T_n є несуперечливою. Зробимо це методом від супротивного: тобто припустимо, що T_n є суперечливою і виведемо з цього, що тоді і T_{n-1} є такою. Якщо T_n є суперечливою, то за лемою 2.4, будь-яка її формула є теоремою. Зокрема будемо мати $\vdash_{T_n} \neg S_n$, звідки за означенням теорій T_n будемо мати $S_n \vdash_{T_{n-1}} \neg S_n$. Застосуємо теорему дедукції (S_n- замкнена формула):

$$\vdash_{T_{n-1}} S_n \to \neg S_n.$$

Маємо такий вивід

№	формула	коментар
1	$S_n \to \neg S_n$	теорема теорії T_{n-1}
2	$(S_n \to \neg S_n) \to \neg S_n$	підстановка $S := H$ у тавтологію $(H \to \neg H) \to \neg H$ і застосування наслідку 2.5.
3	$\neg S_n = \neg\,(\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}) \to \neg U_n(\beta_{j_n}))$	MP 1,2
4	$\neg\,(\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}) \to \neg U_n(\beta_{j_n})) \to (\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}) \wedge \neg\neg U_n(\beta_{j_n}))$	підстановка у тавтологію $\neg(G \to H) \to (G \wedge \neg H)$ і застосування наслідку 2.5.
5	$\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}) \wedge \neg\neg U_n(\beta_{j_n})$	MP 3,4
6	$(\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}) \wedge \neg\neg U_n(\beta_{j_n})) \to \neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n})$	підстановка у тавтологію $(G \wedge H) \to G$, наслідок 2.5.
7	$(\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}) \wedge \neg\neg U_n(\beta_{j_n})) \to \neg\neg U_n(\beta_{j_n})$	підстановка у тавтологію $(G \wedge H) \to H$, наслідок 2.5.
8	$\neg \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n})$	MP 5,6
9	$\neg\neg U_n(\beta_{j_n})$	MP 5,7
10	$\neg\neg U_n(\beta_{j_n}) \to U_n(\beta_{j_n})$	теорема числення висловлювань $\neg\neg H \to H$, наслідок 2.5
11	$U_n(\beta_{j_n})$	MP 9,10

Отже в теорії T_{n-1} маємо
$$\vdash_{T_{n-1}} U_n(\beta_{j_n}).$$

Нехай z така змінна, що не зустрічається у виводі формули $U_n(\beta_{j_n})$. Зробимо у цьому виводі заміну $z \to \beta_{j_n}$. Враховуючи, що β_{j_n} не входить у формули $U_k(x_{i_k})$, $1 \leq k \leq n$, можна стверджувати, що ми при цьому не порушимо аксіом теорії T_{n-1}, і отримаємо вивід формули $U_n(z)$. Застосувавнням правила Gen по змінній z отримаємо
$$\vdash_{T_{n-1}} \forall z U_n(z).$$

За аксіомою 4 маємо
$$\vdash_{T_{n-1}} \forall z U_n(z) \to U_n(x_{i_n}),$$
тут терм $t = x_{i_n}$ вільний для z у формулі $U_n(z)$, бо згадаємо, що x_{i_n} єдина можлива вільна змінна у формулі $U_n(x_{i_n})$ і вона у ній не квантується. Отже, за MP маємо $\vdash_{T_{n-1}} U_n(x_{i_n})$, а за правилом Gen по змінній x_{i_n} отримуємо
$$\vdash_{T_{n-1}} \forall x_{i_n} U_n(x_{i_n}).$$

Але приймаючи до уваги рядок 8 виводу формули $U_n(\beta_{j_n})$, маємо
$$\vdash_{T_{n-1}} \neg\forall x_{i_n} U_n(x_{i_n})$$
і отже теорія T_{n-1} є суперечливою. Таким чином, припущення про суперечливість T_n привело до суперечливості T_{n-1} Цим доведена несуперечливість теорій T_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, а отже і теорії T_∞.

За лемою Ліндёнбаума існує несуперечливе повне розширення теорії T_∞. Позначимо через $\widetilde{T}$ отриману теорію; $T_\infty \subset \widetilde{T}$.

Якщо ми побудуємо модель теорії $\widetilde{T}$,яка є розширенням T, то тим самим буде побудована і модель теорії T.

Терм, який не містить вільних змінних, назвемо **замкненим** . Область інтерпретації D визначимо, як множину замкнених термів теорії $\widetilde{T}$, тобто вона складається з елементів вигляду
$$D = \{a, b, c, \dots, f(a), g(a, b), h(a, b, c,), \dots, h(g(a, b), f(a), g(c, b)), \dots\}.$$

Визначимо дію інтерпретатора I^* на множині замкнених формул:

i) замкненим термам, зокрема константам, співставимо ті ж самі вирази, що є елементами множини D;

ii) правило інтерпретації атомарних формул виду $A(t_1, t_2, \dots, t_n)$, де $A-$ предикатна константа, а $t_1, t_2, \dots, t_n-$ замкнені терми, буде наступним
$$I^*(A)(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} 1 & \vdash_{\widetilde{T}} \quad A(t_1, t_2, \dots, t_n) \\ 0 & \nvdash_{\widetilde{T}} \quad A(t_1, t_2, \dots, t_n). \end{cases} \tag{2.3}$$

Цим дія інтерпретатора I^* визначена на всіх замкнених формулах теорії $\widetilde{\mathrm{T}}$. Доведемо наступне твердження для замкнених формул $\mathcal{F}$ теорії $\widetilde{\mathrm{T}}$:

$$I^*(\mathcal{F}) = 1 \quad \Leftrightarrow \ \vdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}.$$

Доведення проведемо методом математичної індукції по кількості m логічних зв'язок і кванторів у формулі $\mathcal{F}$.

База індукції: якщо $m = 0$, то формула $\mathcal{F}$ є атомарною і доведення випливає з означення інтерпретації (2.3).

Індукційний крок. Припустимо, що твердження є правильним для формул, у яких число зв'язок і кванторів менше за m. Виходячи із синтаксису теорії, формула $\mathcal{F}$, що містить m зв'язок і кванторів може мати одну з наступних форм:

1^0 $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$;

2^0 $\mathcal{F} = \mathcal{G} \to \mathcal{H}$;

3^0 $\mathcal{F} = \forall x \mathcal{G}(x)$,

де формули $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ містять меншу кількість зв'язок і для них виконується припущення індукції.

Розберемо послідовно ці випадки.

1^0 $\mathcal{F} = \neg\mathcal{G}$.

Припустимо, що $I^*(\mathcal{F}) = 1$, тоді $I^*(\mathcal{G}) = 0$ і за припущенням індукції маємо $\nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{G}$. Але згадаємо, що за побудовою $\widetilde{T}$ є повною теорією, звідки маємо $\vdash_T \neg\mathcal{G}$, тобто $\vdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}$.

Якщо ж $I^*(\mathcal{F}) = 0$ і $I^*(\mathcal{G}) = 1$, то за припущенням індукції маємо $\vdash_{\widetilde{T}} \mathcal{G}$. З несуперечливості теорії $\widetilde{T}$ випливає: $\nvdash_{\widetilde{T}} \neg\mathcal{G}$, тобто, $\nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}$. цим випадок 1^0 розібрано.

2^0 $\mathcal{F} = \mathcal{G} \to \mathcal{H}$.

Покажемо, що

$$I^*(\mathcal{F}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}.$$

$\Rightarrow$ Припустимо, що $I^*(\mathcal{F}) = 0$, тоді $I^*(\mathcal{G}) = 1, I^*(\mathcal{H}) = 0$. За припущенням індукції маємо,

$$\vdash_{\widetilde{T}} \mathcal{G}, \ \ \nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{H}.$$

Оскільки $\widetilde{T}-$ повна теорія, то будемо мати $\vdash_{\widetilde{T}} \neg\mathcal{H}$. Скористаємося тавтологією числення висловлювань: $a \to (\neg b \to \neg(a \to b))$. Згідно наслідку 2.5 маємо теорему числення предикатів

$$\vdash \mathcal{G} \to (\neg\mathcal{H} \to \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H}).$$

Застосувавши два рази MP отримуємо $\vdash_{\widetilde{T}} \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H})$, а враховуючи несуперечливість $\overline{T}$, $\nvdash_{\overline{T}} \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, що і треба було довести.

$\Leftarrow$ Припустимо, що $\nvdash_{\overline{T}} \mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Тоді з повноти теорії $\overline{T}$ випливає, що $\vdash_{\overline{T}} \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H})$. Скористаємося тавтологіями числення висловлювань: $\neg(a \to b) \to a, \ \ \neg(a \to b) \to \neg b$. Згідно наслідку 2.5 маємо теореми числення предикатів:

$$\vdash \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H}) \to \mathcal{G}, \ \ \vdash \neg(\mathcal{G} \to \mathcal{H}) \to \neg\mathcal{H}.$$

Застосувавши МР отримуємо дві теореми теорії $\overline{T}$:

$$\vdash_{\overline{T}} \mathcal{G}, \quad \vdash_{\overline{T}} \neg\mathcal{H}.$$

За припущенням індукції, для формули $\mathcal{G}$ отримуємо, $I^*(\mathcal{G}) = 1$. Оскільки, $\widetilde{T}$ є несуперечливою теорією, то маємо $\nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{H}$ і за припущенням індукції $I^*(\mathcal{H}) = 0$, а отже і $I^*(\mathcal{F}) = 0$, що і треба було довести.

Перейдемо тепер до випадку 3^0 : $\mathcal{F} = \forall x \mathcal{G}(x)$. Оскільки формула $\mathcal{F}$ є замкненою, то x єдина вільна змінна формули $\mathcal{G}(x)$. Згадаємо, що всі такі формули були перелічені на початку доведення, тобто існує номер k такий, що

$$\mathcal{G}(x) = U_k(x_{i_k}), \ \mathcal{F} = \forall x_{i_k} U_k(x_{i_k}).$$

Припустимо, що $I^*(\mathcal{F}) = 1$, але в той же час $\nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}$. Тоді з повноти теорії $\widetilde{T}$ випливає, що $\vdash_{\widetilde{T}} \neg\mathcal{F}$, тобто $\vdash_{\widetilde{T}} \neg\forall x_{i_k} U_k(x_{i_k})$. Тепер згадаємо що формула $\neg\forall x_{i_k} U_k(x_{i_k}) \to \neg U_k(\beta_{j_k})$ є аксіомою теорії $\widetilde{T}$ (див. (2.2)) і за modus ponens отримуємо $\vdash_{\widetilde{T}} \neg U_k(\beta_{j_k})$.

З іншого боку, $I^*(\mathcal{F}) = 1 \ \Rightarrow I^*(U_k(\beta_{j_k})) = 1$ і за припущенням індукції (формула $U_k(\beta_{j_k})$ містить меншу кількість зв'язок), маємо: $\vdash_{\widetilde{T}} U_k(\beta_{j_k})$. Але раніше ми показали, що теорія $\widetilde{T}$ є несуперечливою і в ній неможливе одночасне виконання $\vdash_{\widetilde{T}} \neg U_k(\beta_{j_k})$ і $\vdash_{\widetilde{T}} U_k(\beta_{j_k})$. Отримана суперечність доводить імплікацію:

$$I^*(\mathcal{F}) = 1 \ \Rightarrow \vdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}.$$

Припустимо тепер, що $I^*(\mathcal{F}) = 0$ і при цьому $\vdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}$. Областю інтерпретації для I^* була обрана множина замкнених термів, отже, якщо $I^*(\forall x_{i_k} U_k(x_{i_k})) = 0$, то існує замкнений терм t такий, що $I^*(U_k(t)) = 0$.

З іншого боку, ми припустили що $\vdash_{\widetilde{T}} \forall x_{i_k} U_k(x_{i_k})$. Скористаємося аксіомою 4:

$$\forall x_{i_k} U_k(x_{i_k}) \to U_k(t),$$

при цьому зауважимо, що вказаний раніше терм t є замкненим і це можна зробити без усяких застережень. Тоді за М.Р. отримуємо $\vdash_{\widetilde{T}} U_k(t)$ і за припущенням індукції (формула $U_k(t)$ містить меншу кількість зв'язок) маємо $I^*(U_k(t)) = 1$. Отримана суперечність доводить імплікацію:

$$I^*(\mathcal{F}) = 0 \ \Rightarrow \nvdash_{\widetilde{T}} \mathcal{F}$$

і завершує доведення твердження.

Цим доведено, що побудована інтерпретація є моделлю для будь-якої замкненої теореми теорії $\widetilde{T}$. Якщо теорема не є замкненою, то її замикання буде теоремою (правило Gen), значення I^* на ньому дорівнює 1, але це можливо лише тоді коли I^* є моделлю самої теореми. Таким чином, I^* є моделлю теорії $\widetilde{T}$, а значить і T.

Теорема 2.10. *В довільній теорії першого порядку* T *має місце*

$$\models \mathcal{F} \quad \Rightarrow \; \vdash_{\mathrm{T}} \mathcal{F},$$

тобто будь-яка тотожно-істинна формула є теоремою цієї теорії.

Доведення. Спочатку зауважимо, що довільна формула є тотожно-істинною тоді і тільки тоді, коли її замикання є такою. З іншого боку вона є теоремою тоді і лише тоді коли є теоремою її замикання. Отже, досить розглянути випадок коли тотожно-істинна формула $\mathcal{F}$ є замкненою. Припустимо, що в теорії T замкнена тотожно-істинна формула $\mathcal{F}$ не є теоремою. Тоді, за лемою 2.6, приєднанням формули $\neg\mathcal{F}$ до списку аксіом теорії T ми отримуємо несуперечливе розширення: $\mathrm{T} \subset \mathrm{T}_1$. За попередньою теоремою, ця теорія має модель I, для якої з одного боку $I(\neg\mathcal{F}) = 1$, оскільки $\neg\mathcal{F}$ -аксіомаT_1, а з іншого $I(\mathcal{F}) = 1$, оскільки $\mathcal{F}-$ тотожно-істинна формула. Отримана суперечність доводить твердження. □

Теорема 2.11. *(Теорема Гьоделя про повноту числення предикатів.) Для довільної формули $\mathcal{F}$ будь-якого числення предикатів має місце*

$$\models \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \vdash \mathcal{F}.$$

Доведення. Доведення випливає з теорем 2.5, 2.10. □

Теорема 2.12. *(про компактність.)*

Нехай $\Omega-$ множина формул числення предикатів така, що будь-яка її скінченна підмножина має модель, тоді і вся множина формул Ω має модель ; тобто якщо для довільної скінченної підмножини Γ : $\Gamma \subset \Omega$, існує інтерпретація I_Γ така, що $I_\Gamma(\gamma) = 1$ для всіх $\gamma \in \Gamma$, то існує інтерпретація I_Ω для якої $I_\Omega(\omega) = 1$, для всіх $\omega \in \Omega$.

Доведення. Для довільної підмножини $\Gamma \subset \Omega$ розглянемо теорію першого порядку T_Γ, список спеціальних аксіом якої збігається з Γ. Якщо $\Gamma-$ скінченна підмножина, то ця теорія несуперечлива. Дійсно, якщо має місце $\vdash_{\mathrm{T}_\Gamma} \mathcal{F}$ і $\vdash_{\mathrm{T}_\Gamma} \neg\mathcal{F}$ для деякої формули $\mathcal{F}$, то будемо мати суперечність - $I_\Gamma(\mathcal{F}) = I_\Gamma(\neg\mathcal{F}) = 1$. Звідси випливає, що і теорія T_Ω є несуперечливою, адже якщо $\vdash_{\mathrm{T}_\Omega} \mathcal{F}$ і $\vdash_{\mathrm{T}_\Omega} \neg\mathcal{F}$, то можна розглянути множину Γ^* аксіом теорії, які зустрічаються у доведеннях цих теорем, яка є скінченною. Отже, отримуємо протиріччя - $\vdash_{\mathrm{T}_{\Gamma^*}} \mathcal{F}$ і $\vdash_{\mathrm{T}_{\Gamma^*}} \neg\mathcal{F}-$ теорія T_{Γ^*} є суперечливою. Отримана суперечність є наслідком зробленого припущення, що теорія T_Ω є суперечливою. Отже, вона несуперечлива і за теоремою 2.9 для неї існує модель. □

3 Арифметичні функції та відношення.

Повернемося, до теорії натуральних чисел S. З перших восьми аксіом цієї теорії, застосуванням схеми аксіом A4, для довільних термів t, s, u, r отримуємо теореми

S'1 $(t = r) \to (t = s \to r = s)$;

S'2 $(t = r) \to N(t) = N(r)$;

S'3 $\neg(N(t) = 0)$;

S'4 $(N(t) = N(r)) \to t = r$;

S'5 $t + 0 = t$

S'6 $t + N(r) = N(t + r)$;

S'7 $t \cdot 0 = 0$;

S'8 $t \cdot N(r) = (t \cdot r) + t$

Означення 3.1. *Функції від однієї та багатьох змінних, відношення та предикати довільної арності визначені на множині* $\bar{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$ *будемо називати* **арифметичними**.

Означення 3.2. *Будемо говорити, що арифметичне відношення* $R = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *має зображення в теорії* S*, якщо існує формула* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в теорії* S :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in R \Rightarrow \ \vdash_S \mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n); \tag{3.1}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \notin R \Rightarrow \ \vdash_S \neg\mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n); \tag{3.2}$$

Арифметичний предикат має зображення в теорії S*, якщо має зображення відношення, яке він характеризує.*

Приклад 3.1. *Відношення рівності між натуральними числами є виразними в теорії* S.

Приклад 3.2. *Відношення менше між натуральними числами є виразними в теорії* S.

Означення 3.3. *Арифметична функція* $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *має зображення в теорії* S*, якщо існує формула* $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$ *в теорії* S :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1} \Rightarrow \ \vdash_S \mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}); \tag{3.3}$$

$$\vdash_S \exists x_{n+1} \mathcal{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, x_{n+1}). \tag{3.4}$$